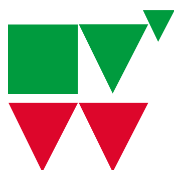
EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

- IN MEMORIAM
- ONTDEKKINGSTOCHT
- HOORZITTING OVER REKENTOETS
- UITDAGENDE PROBLEMEN
- EXACT BETER VERDELEN
- DYNAMISCH MODELLEREN

NR.4



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 89 | FEBRUARI 2014

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 89 NR 4

IN DIT NUMMER



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

KORT VOORAF

'Leon is er niet meer, dat is onvoorstelbaar. Geschokt, dat is niet alleen het bestuur van de NVvW maar ook alle leden die Leon kennen. En dat zijn er heel veel. Want hij is een icoon binnen de vereniging, was wanneer het kon altijd aanwezig op de jaarvergadering/studiedag en had daar vele petten op. Meestal gaf hij dan een workshop en liet daarbij zijn *good practices* en zijn creatieve kant zien en is zo een inspiratie voor vele generaties wiskundeleraren.' Zo schreef Marianne Lambriex op de NVvW-website. Ze schreef nog meer over alle bijzondere kanten van Leon van den Broek, en dat deden anderen ook. De WiskundE-brief van zondag 15 december was geheel aan hem en zijn werk gewijd. Wij kregen vlak na de zomervakantie van Leon een enthousiaste e-mail. Samen met Stephan Berendonk wilde hij graag een serie artikelen publiceren, gebaseerd op lesmateriaal over de veelvlakkenstelling van Euler. De redactie was meteen enthousiast. Het materiaal zou centraal staan, maar ook het gebruik in de les en de onderliggende didactische grondslagen. Maar bovenal zou het een oproep zijn om met concreet materiaal leerlingen op ontdekkingsreis te sturen. Want in zijn eigen woorden: 'Het maakt de werkwijze in de wiskunde duidelijk. Dat wil zeggen hoe je onderzoekend en creatief voorzichtig stappen moeten zetten in een nieuwe omgeving'. Een paar dagen voordat Leon overleed, stuurde hij ons het eerste artikel van deze serie. In overleg met Stephan Berendonk is besloten dat we deze bijdrage nu publiceren. Ook zal hij zorg dragen voor de volgende delen die al samen met Leon waren voorbereid.
Met dank aan Martin Kindt starten we deze *Euclides* met een in memoriam voor Leon van den Broek. Vervolgens vindt u het eerste deel van de artikelenserie. Hij blijft ons inspireren...

Marjanne de Nijs
Hoofdredacteur *Euclides*



LEON VAN DEN BROEK (1947-2013)

Martin Kindt

Een week voor de studiedag 2013 van de NVvW belde ik Leon op. Of hij ging, hoefde ik niet te vragen, hij was er altijd. Zoals hij er ook altijd bij was op de NWD en de APS-conferenties. In de pauzes kon je hem dan vinden als veredelde marktkoopman die iedereen naar zijn kraam met mooie spellen en spullen wist te lokken. Ik vroeg hem of hij zin had mij op te halen. Dat hij direct ja zou zeggen, wist ik eigenlijk ook wel van tevoren. Hij zou extra vroeg komen, want zijn twee(!) winkeltjes moesten worden ingericht. Ik was onder de indruk van de vakkundige wijze waarop zijn auto was volgeladen. In één keer alles binnen te brengen, dat lukte niet. Maar eenmaal binnen ging het snel; in een mum van tijd was zijn koopwaar uitgestald. Die dag had hij ook nog een werkgroep waar hij met veel elan zijn passie voor inzichtelijk wiskundeonderwijs uitdroeg. Dat dit de laatste dag zou zijn dat ik hem ontmoette, het is nog steeds onwerkelijk.

Onze eerste ontmoeting vond 40 jaar eerder plaats, ik was toen leraar in Wageningen. We waren daar gestart met het ontwerpen van eigen lesmaterialen die een meer uitdagende invulling zouden geven aan de New Math die het onderwijs destijds domineerde. Wim Kremers die naar het IOWO[1] zou vertrekken, wist een interessante opvolger: een ogenschijnlijk wilde jongen die van een biertje en flipperkasten hield, maar die naast het werken aan zijn proefschrift met veel succes al enige jaren in Nijmegen assistent was van Stef Thijs bij het wiskundeonderwijs aan scheikundestudenten. Dat was Leon. Wij moesten wel enige weerstand bij de directie van de school wegnemen, want als Leon iets niet zeker wist of begreep, zei hij dat zonder omwegen, wat niet in goede aarde viel bij een van de conrectoren. Gesteund door collega's kon ik duidelijk maken dat Leon van wiskunde wél verstand had en dat wij vonden dat hij de sectie moest versterken. Aldus gebeurde en daarvan heeft niemand ooit spijt gehad, directie noch leraren noch leerlingen. Een understatement, want Leon ontpopte zich al snel als een bevlogen en bekwaam docent.

Promotie
In januari 1975 promoveerde Leon bij Arnoud van Rooij op het onderwerp *Maattheorie op Hilbertruimten.* Van die gebeurtenis herinner ik me slechts dat Leon in spijkerpak was. Een wiskundige proefschrift in het onvermijdelijk specialistische onderwerp is voor niet-ingewijden al gauw te hoog gegrepen, zo ook voor mij. Maar een van de wiskundige stellingen uit het bijgevoegde lijstje sprak mij wél aan:

Een functie G: $\mathrm{IR}^+ \times \mathrm{IR}^+ \rightarrow \mathrm{IR}^+$ noemen we een gemiddelde als er een continue 1-1-duidige functie f van IR^+ naar IR^+ bestaat, zodat

$$G(x,\ y) = f^{inv}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)$$

Een continue functie G: $\mathrm{IR}^+ \times \mathrm{IR}^+ \rightarrow \mathrm{IR}^+$ is dan en slechts dan een gemiddelde als
(a) $x < G(x, y) < y$ voor alle x,y $\in \mathrm{IR}^+$ met $x < y$, én
(b) $G(G(x_{\sigma(1)},\ x_{\sigma(2)}),\ (x_{\sigma(3)},\ x_{\sigma(4)}))$ onafhankelijk is van $\sigma \in S_4$ voor alle $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathrm{IR}^+$.

Bij het gesprek dat Leon twee jaar eerder in het kader van zijn sollicitatiegesprek met collega Wim Bergman en mij had gevoerd, waren zaken als meetkundig en harmonisch gemiddelde ter sprake gekomen, onderwerpen die naar zijn (en ook mijn) mening ten onrechte geen deel uitmaken van het standaardcurriculum. Misschien zal hij, indachtig dat gesprek, op het idee van zijn mooie stelling gekomen zijn; ik heb het hem nooit gevraagd. Wel heb ik mij, in een praatje ter gelegenheid van het door Pantarijn georganiseerde symposium bij zijn afscheid van de school (2007), laten inspireren door deze stelling. Na afloop stelde ik hem voor samen een Zebraboekje te schrijven met als onderwerp 'gemiddelden'. Hij was er direct voor te porren, maar vanwege allerlei vermeende prioriteiten heb ik dat voor mij uitgeschoven. Als het idee van Leon geweest zou zijn, had hij mij vast en zeker aan mijn jasje getrokken: hij hield zich aan elke afspraak en stelde niets uit.

De Wageningse Methode
Omdat ikzelf in 1976 volledig op het IOWO ging werken, ben ik niet erg lang collega van Leon geweest. Wel was er een zekere samenwerking ontstaan tussen het IOWO en de Wageningse wiskundesectie en zo bleef Leon in mijn gezichtskring. Vanaf 1978 ontfermde Leon zich samen met Wim Kremers - inmiddels leraar in Zevenaar - over de Wageningse Methode. Die werd als serie werkboekjes bij Meijers en Siegers (Oosterbeek) uitgegeven, rijkelijk geïllustreerd door Leons broer Ad. In 1985 verscheen er bij Educaboek

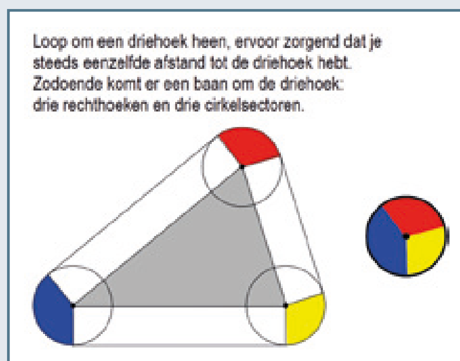
een alternatieve versie, tekstboek met aanvullend 'knipblok' en antwoordenboekje. Het voorwoord aan de leerling begon zo: met dit boek leer je wiskunde door *doen, puzzelen, samenwerken* en *zelf onderzoeken*. Of de formulering van Leon was, weet ik niet, maar zijn goedkeuring had die zeker. De slotregel van het voorwoord was: 'je begrijpt dat je vaak schaar en lijm zult moeten gebruiken; zorg ervoor die bij je te hebben'. Voor twee versies van één methode was kennelijk geen plaats, want de fraai vormgegeven uitgave verdween geruisloos van de markt. Het was in de tijd van de landelijke invoering van wiskunde A en B in het vwo en de Wageningse Methode richtte het vizier nu ook op de bovenbouw. Intussen konden mijn kinderen enige jaren genieten van Leon's lessen. Wat ze ervan vonden? 'Leon werd nooit kwaad en rustte niet voordat je het écht begreep'.

Altijd in voor experimenten

De school in Wageningen maakte deel uit van het derde echelon scholen waar geëxperimenteerd werd met de toen nieuwe vakken wiskunde A en B. Zo kon ik de contacten met de school en met Leon weer wat aanhalen. In 1985 had ik met Heleen Verhage een serie lessen 'ruimtemeetkunde met de micro' ontworpen. De stof ging wat verder dan het reguliere programma. Voor Leon was dit geen probleem, hij stelde zonder aarzeling zes(!) van zijn toch kostbare lessen wiskunde B in 5-vwo ter beschikking. Het was een geslaagd experiment, niet in het minst vanwege de ontspannen werksfeer die er in Leons klas heerste. Ook later in het Profi-project, dat voorafging aan de wiskunde in de nieuwe tweede fase, was Leon altijd bereid om mee te werken aan een gedurfde proef. Zo herinner ik me een schoolonderzoek met als thema 'koken in de spiegel' waarbij de leerlingen zich een complete ochtend met behulp van Cabri (letterlijk) konden focussen op de parabolische spiegel. Er moesten werkstukken worden ingeleverd en de volgende dag stond Leon aan mijn voordeur met van elk werkstuk een kopie, compleet met zijn beoordelingen.

Lesgeven is nooit routine

Bij het al gememoreerde afscheid van Wageningen in 2007 kregen de deelnemers zijn boek *Mijn mooiste Mathe* cadeau. In het voorwoord staat: 'Je kunt het beschouwen als mijn memoires'. Het is een verzameling van wiskundige pareltjes, waarvan een aantal ook geschikt is om op school te behandelen. Zo komt de stelling van de drie-hoekensom als volgt aan bod: Van elk van de drie cirkels is de helft wit, en omdat de gekleurde sectoren samen precies een hele cirkel vormen, zijn de grijze cirkelpunten samen juist een halve cirkel. Dit zou toch zo in een brugklas kunnen worden gebruikt, bij voorkeur eerst met uitgeknipte driehoek en cirkels om de 180°-stelling te verklaren. Altijd opnieuw nadenken over elementaire wiskunde, het kan zo vruchtbaar voor het onderwijs zijn. En als je iets nieuws doet, straal je dat als leraar uit, experimenten mislukken daarom zelden. Dat was Leons credo. Verfrissing kan ook worden gezocht in een nieuwe werkvorm. In 1998 schreef Leon in de *Nieuwe Wiskrant* enthousiast over zijn ervaring met 'presentaties' in havo-4 wiskunde B. Aan de hand van rijke meetkundeopgaven uit het leerboek hadden zijn leerlingen de behandeling ervan aan klasgenoten gepresenteerd. Die werden ook ingeschakeld bij de beoordeling. Leon schreef dat hij (en zijn leerlingen) een bijzonder prettig gevoel aan de happening hadden overgehouden. Zijn stelling 'lesgeven is nooit routine' maakte hij ook op deze wijze waar!



Energiek, enthousiast, eerlijk, en (gezond) eerzuchtig

Wat heeft Leon niet allemaal gedaan? Hoeveel sporen heeft hij niet nagelaten? Competitief als hij was, ging veel van zijn interesse en activiteiten uit naar wiskundewedstrijden. Te beginnen met de 'gewone' Wiskunde Olympiade. Zelf een scherpzinnige probleemoplosser stimuleerde hij zijn excellente leerlingen tot deelname. Zo'n leerling was Quintijn Puite, nu onze nationale Olympiade-gangmaker. Die getuigde daarvan dankbaar in de WiskundE-brief. Dan de bekende Kangoeroe, waaraan Leon zo'n tien jaar geleden verknocht raakte en die dankzij zijn inspanningen zo groot is geworden. Ook de wiskunde B-dag behoorde tot zijn werkveld. Na 1998 kon hij zijn creativiteit ook uitleven bij het Cito, met name op het terrein van vwo B. Voor cTWO ontwierp hij lesmateriaal. Vanaf 2003 was hij ook nog tutor op de Radboud Universiteit. Verder waren er de Zebra's, nu vijf in getal – een zesde verschijnt mogelijk postuum – die hij samen met vooral Nijmeegse wiskundigen schreef. En kort voor zijn plotselinge overlijden had hij nog een contract afgesloten met het Freudenthal Instituut over participatie in het DWO-project. Van tijd tot tijd schreef hij in *Pythagoras*, de *Nieuwe Wiskrant* en *Euclides*. Zijn artikel in deze jaargang *'Deze aap kan rekenen*' was een treffend staaltje van Leons kunde. Maar van het africhten tot aapjes moest hij helemaal niets hebben: 'Liever geen wiskunde, dan onbegrepen routines'. Dat was Leon.

Martin Kindt

Noot

[1] De voorloper van het Freudenthal Instituut

ONTDEKKINGSTOCHT

Leon van den Broek
Stephan Berendonk

BRUSSELS SPROUTS

Het spel *Brussels sprouts* is rijk aan wiskunde. Met de behandeling daarvan krijgt de wiskundeles een heel andere inhoud dan gewoonlijk. Is dat de moeite waard? De schrijvers van dit artikel vinden van wel. Het hoe en waarom wordt hier uitgelegd.

Brussels sprouts

Een aantal plustekens op een blad papier, zie figuur 1, dat is de beginsituatie van *Brussels sprouts*, een spel dat in 1967 door John H. Conway bedacht is.[1] Die plustekens hebben tezamen twaalf armen. Om beurten doen de twee spelers Rood en Groen een zet: ze verbinden twee armen en zetten een dwarsstreepje door de verbindingslijn. Dat geeft twee nieuwe armen. De verbindingslijnen mogen elkaar en zichzelf niet snijden. Rood begint. In figuur 2 staat een volledig spelverloop, met in elk plaatje een zet van Rood en een zet van Groen. Na het zesde plaatje rest er voor Rood nog één zet, waarna Groen heeft verloren.

Een mogelijke ontdekkingstocht

Is het zeker dat het spel niet oneindig lang kan doorgaan? Je krijgt als speler het vermoeden dat je tijdens het spelverloop uit steeds minder zetten kunt kiezen. Dus eindigt het spel altijd. Om dit vermoeden te controleren, moeten we eerst afspreken wat we hier überhaupt met *verschillende zetten* bedoelen.

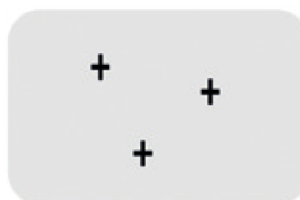
Definiëren – Er zijn allerlei definities mogelijk van wanneer twee zetten hetzelfde zijn. Misschien staat die van u er bij. Twee zetten zijn *hetzelfde* als:

- ze hetzelfde paar vrije armen verbinden;
- ze geleidelijk in elkaar kunnen worden overgevoerd;
- ze geleidelijk in elkaar kunnen worden overgevoerd of als ze hetzelfde paar vrije armen in het buitengebied verbinden; zie figuur 3;
- als ze evenveel gebieden opleveren, met in elk gebied evenveel vrije armen. (De lijnen verdelen het papier in gebieden. Alle punten die je kunt bereiken zonder over een lijn heen te moeten, behoren tot hetzelfde gebied. Ook het oneindig grote buitengebied telt mee als gebied);
- alle zetten zijn hetzelfde!

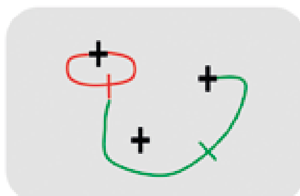
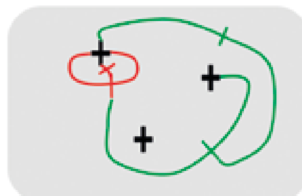
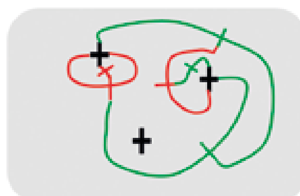
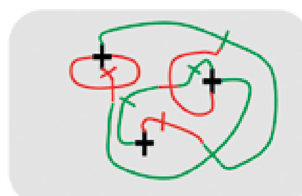
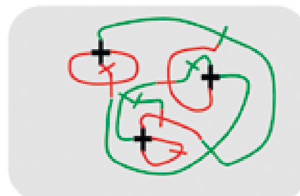
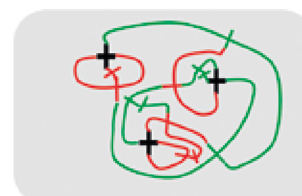
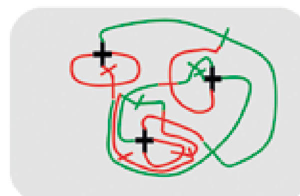
Ontdekken – We kiezen de eerste definitie: twee zetten zijn hetzelfde, als ze hetzelfde paar vrije armen verbinden. Daalt bij deze definitie het aantal *mogelijke zetten* tijdens het spel? We toetsen dit aan de hand van het exemplarische spelverloop in figuur 2. Er zijn $12\times11/2 = 66$ verschillende mogelijkheden voor de eerste zet. Daarna zijn er voor de volgende zetten 46, 46, 45, 36, 19, 16, 16, 8, 5, 4, 2, 1 mogelijkheden.

Inderdaad een dalende rij. Hij is niet strikt dalend, want er zijn zetten waarbij het aantal mogelijkheden hetzelfde blijft. Wanneer we deze twee zetten met de overige vergelijken, valt op dat het de enige zetten zijn waarbij geen gebied in tweeën gesplitst wordt. Verder zijn het ook de enige zetten, die twee *componenten* met elkaar verbinden. Kunt u verzinnen wat hier met 'component' bedoeld wordt? Het beschouwde spelverloop bestaat dus uit twee *verbindende* en elf *splitsende* zetten. Zie figuur 4.

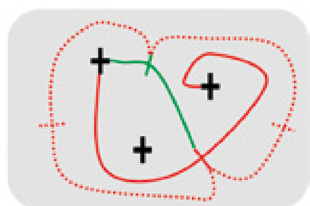
Redeneren – Als je alleen verbindende zetten zou doen, zou het spel nooit aflopen. Maar dat is onmogelijk, want er zijn in het begin drie componenten, de plustekens,



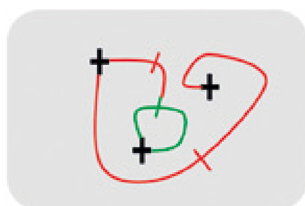
figuur 1

figuur 2



figuur 3 de twee gestippelde zetten kunnen als hetzelfde beschouwd worden.



figuur 4 beide rode zetten zijn verbindend, de groene is een splitsende zet.

en na twee verbindende zetten is er dus nog maar een component over. Die twee verbindende zetten moeten ook een keer optreden, want aparte componenten kunnen altijd met elkaar verbonden worden (waarom?). Voor de splitsende zetten zijn twee observaties van belang: het aantal vrije armen blijft steeds hetzelfde (waarom?) en er kan geen gebied zonder vrije armen ontstaan. Hieruit volgt dat er hoogstens twaalf gebieden kunnen ontstaan en dat er dus hoogstens elf splitsende zetten kunnen voorkomen. Na minder dan elf splitsende zetten is er een gebied waarin ten minste twee vrije armen zijn (waarom?), zodat het spel nog niet is afgelopen.
Het spel duurt dus altijd precies dertien zetten, twee verbindende en elf splitsende. Dus de eerste speler wint altijd, hoe er ook wordt gespeeld.

Generaliseren — Staat de winnaar ook bij voorbaat vast wanneer we met een ander aantal plustekens beginnen? Bij elk startaantal is het aantal verbindende zetten 1 minder dan het aantal plustekens in het begin en het aantal splitsende zetten is 1 minder dan het aantal gebieden aan het einde. In formule:

- *aantal verbindende zetten* = *plustekens* – 1
- *aantal splitsende zetten* = *gebieden* – 1

Het aantal gebieden aan het einde is echter gelijk aan het aantal vrije armen en dat is ook nu vier keer het aantal plustekens. Uit de vergelijkingen volgt:

- *aantal zetten* = 5 × *plustekens* – 2.

Bij een oneven aantal plustekens wint dus de eerste speler, bij een even aantal de tweede speler.

Het didactische potentieel
Het oplossen van vraagstukken uit het klassieke meetkundeonderwijs heeft veel gemeen met het leggen van een puzzel. Je hebt een collectie puzzelstukken (bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid, zijde-zijde-zijde, ...) en die moet je goed aan elkaar passen. Natuurlijk heb je niet altijd alle puzzelstukken nodig. Wanneer je wiskundig onderzoek doet, zijn de puzzelstukken vaak vooraf nog helemaal niet beschikbaar: je moet de geschikte werktuigen (begrippen) eerst zelf maken. Zo is het ook bij het spel *Brussels sprouts*. Om goed te snappen waarom het spel steeds even lang duurt en om de argumenten goed te kunnen communiceren, heb je begrippen nodig die in de spelregels helemaal niet voorkomen. Bijvoorbeeld hebben wij in onze tocht de begrippen *componenten*, *gebieden*, *verbindende zetten* en *splitsende zetten* ingevoerd.

Begrippen als werktuig — Om aan te tonen dat het spel altijd eindigt, hebben we hard gemaakt dat het aantal mogelijke zetten in de loop van het spel afneemt. Hiervoor moesten we afspreken wanneer we twee zetten als hetzelfde zouden beschouwen. Deze keuze was cruciaal. Immers, deze definitie gaf ons aanleiding om twee soorten zetten te onderscheiden, de verbindende en de splitsende. De gepresenteerde ontdekkingstocht is er dus een voorbeeld van dat nieuwe begrippen vaak *tijdens* het werken aan een probleem worden gevormd. Het is goed als de leerling aan de hand van het werken aan *Brussels sprouts* het nut ervaart van wiskundige begripsvormig.

Wiskunde als proces — Een wiskundige tekst geeft vaak weinig informatie over hoe de daarin behandelde resultaten tot stand zijn gekomen. Dat komt doordat wiskundigen traditioneel – in navolging van Euclides – kiezen voor een systematische, op logica gebaseerde presentatie van hun resultaten. Als je wiskunde bedrijft, zet je echter niet alleen deductieve stappen. Je gebruikt ook analogieën en intuïtieve argumenten. Begrippen die bij het ontdekken een essentiële rol hebben gespeeld, kunnen achteraf voor het beredeneren van de gevonden resultaten overbodig zijn. Zo is het in onze ontdekkingstocht achteraf overbodig naar de zetten te kijken waarbij het aantal zetmogelijkheden daalt en die waarbij dit aantal hetzelfde blijft. Toch gaf pas deze beschouwing aanleiding om splitsende en verbindende zetten te onderscheiden. Bij *Brussels sprouts* wordt dus duidelijk dat er een verschil is tussen *wiskunde als proces* en *wiskunde als product*.[2]

Naamgeving — We hebben in onze tocht suggestieve namen voor de ingevoerde begrippen gekozen: namen die helpen het begrip uit te leggen. Erop vertrouwend dat onze namen inderdaad geschikt zijn, hebben we niet eens expliciete definities voor de begrippen gegeven. Omdat *Brussels sprouts* niet in het standaard wiskundeonderwijs voorkomt, wordt er niet verder op de verworven kennis voortgebouwd. Het onderwerp geeft ons daarom de gelegenheid de namen van de in te voeren begrippen door de leerlingen zelf te laten kiezen. (Elk nadeel heeft zijn voordeel.)
Het zorgvuldige nadenken over een geschikte naam voor een begrip - die niet tot verwarring of meerduidigheid zal leiden - is een belangrijke wiskundige activiteit, die ook aandacht zou moeten krijgen in het wiskundeonderwijs.

Anders dan anders
Dat dit anders is dan de activiteiten in een gewone wiskundeles behoeft geen betoog. Leerlingen (en docent?) begeven zich op onbekend terrein. Ze zijn zelfs niet goed toegerust om dat terrein wiskundig te betreden: ze moeten

zelf een taal en vaardigheid ontwikkelen. En er zijn volop mogelijkheden om te redeneren. De wiskundige opbrengst bestaat uit: werken in een graaf, tellen en redeneren, gebruik van formules. Maar er is meer. Aan de hand van *Brussels sprouts* wordt de werkwijze in de wiskunde duidelijk. Dat wil zeggen hoe je onderzoekend en creatief voorzichtig stappen moet zetten in een nieuwe omgeving. En dat is inderdaad heel anders dan in de gewone wiskundeles, waar bekende kennis wordt overgedragen.

Pleidooi

Het spel kan op verschillende manieren in de klas gebracht worden. We noemen twee uitersten.
De open manier – Laat de leerlingen het spel in tweetallen spelen. Neem daar ruim de tijd voor. Inventariseer na afloop wat de leerlingen hebben ontdekt.
Voorgestructureerd – Lesmateriaal is te vinden op *vakbladeuclides.nl/894berendonk.pdf*. Met weldoordachte vragen wordt de leerling naar wiskundige activiteiten gestuurd. Dit materiaal is ontwikkeld in samenwerking met de Nijmeegse ASL-groep (Actief Samenwerkend Leraarschap).
Wij stellen voor regelmatig – bijvoorbeeld een keer per twee maanden – een ontdekkingstocht met de klas te doen. Daarbij gaan de leerlingen wiskunde bedrijven, los van het boek of het iPad-scherm. Sterker: wiskunde is nu niet reproductief, maar vindt plaats in een volkomen nieuwe omgeving. Waarschijnlijk moeten de leerlingen erg aan deze benadering wennen. Een reden temeer om op ontdekkingsreis te gaan!

In twee volgende afleveringen stellen we andere ontdekkingstochten voor, in de vierde aflevering zullen we het geheel nog eens overzien.

Noten en referenties

[1] Berlekamp, E., Conway, J., & Guy, R. (1982). *Winning Ways*, deel 1, volume 2, p. 564, 569. New York: Academic Press.
[2] H. Freudenthal (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel, p.114-119.
www.encyclopediaofmath.org/index.php/
zie Sprouts#Brussels_Sprouts
vakbladeuclides.nl/894berendonk.pdf

Over de auteurs

Stephan Berendonk is didactisch medewerker aan het mathematisch instituut van de Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn. Leon van den Broek was leraar wiskunde op rsg Pantarijn te Wageningen en auteur van diverse wiskundelesmaterialen. E-mailadres van Stephan Berendonk: *berendon@math.uni-bonn.de*

EEN GOED BEGIN. . .

Erika Bakker



BEGELEIDING EN BEOORDELING

Erika Bakker heeft vorig schooljaar haar LIO-stage wiskunde gedaan, als onderdeel van haar Educatieve Master. Nu is ze begonnen met haar eerste echte baan als docent. In deze rubriek deelt zij haar belevenissen met u.

Dit jaar ben ik geen LIO meer, maar dat betekent niet dat ten opzichte van vorig jaar alles is veranderd. Zo krijg ik nog steeds begeleiding van een coach buiten de wiskundesectie en van een binnen de wiskundesectie. En niet alleen de begeleiding is hetzelfde gebleven, ook worden mijn lessen weer beoordeeld; nu niet door iemand van de opleiding, maar door mijn teamleider. De indicatoren waarop wordt gelet zijn dezelfde, maar dit keer hangt wel mijn baan er vanaf. Een lesbezoek van mijn teamleider vind ik daarom toch wel een beetje spannend. Het gebeurde op een dinsdag en op die dag liep alles anders dan anders.
Op dinsdag geef ik vier lessen. Voor het eerste lesuur had ik een computerlokaal gereserveerd zodat mijn brugklasleerlingen een enquête over mij konden invullen. Toen de leerlingen allemaal achter een computer zaten, regelde mijn teamleider de rest. Ik ging zelf alvast naar het wiskundelokaal. Na een kwartier hoorde ik lawaai op de gang. Ik ging even kijken, maar het waren geen leerlingen uit mijn klas. Na twintig minuten begon ik wel wat ongerust te worden. Gisteren was er in één van mijn andere klassen ook een enquête afgenomen, maar dat duurde hooguit vijf minuutjes. Misschien waren mijn bruggers er vanuit gegaan dat ze vrij waren nadat ze de enquête hadden ingevuld. Ik besloot om toch maar even op onderzoek uit te gaan. Toen ik bij het computerlokaal naar binnen keek, zag ik daar mijn klas zitten. Toch maar even naar binnen om te informeren of ze nog kwamen. Het bleek dat mijn teamleider nadat de leerlingen de enquête hadden ingevuld, nog even een gesprekje met ze was begonnen. Gelukkig was hij net bezig met zijn laatste vraag. En inderdaad, nadat ik nog een paar minuten in mijn lokaal gewacht had, kwamen ze er eindelijk aan. Snel nog even de nieuwe theorie bekijken, samen een opgave maken en toen was de les alweer afgelopen.

> 'IK BESLOOT OM TOCH MAAR EVEN OP ONDERZOEK UIT TE GAAN'

Na twee tussenuren begon mijn les in havo 5. Onverwacht kwam na de klas ook ineens mijn teamleider binnen: 'Is het goed dat ik deze les kom kijken?' Ik vond het prima, maar ook wel een beetje spannend, zeker omdat de eerste les van vandaag ook al ongewoon was geweest. Het doel van deze les in 5 havo was om een aantal functies van de grafische rekenmachine te herhalen. Dat kwam eigenlijk heel goed uit. Ik had een aantal Flipcharts in ActivInspire (software van het digibord) voorbereid, zodanig dat ik er een grafische rekenmachine naast kon projecteren. Ook besteedde ik aandacht aan de notatie van berekeningen die met je met de grafische rekenmachine uitvoert. Hierdoor kwamen meerdere functies van het digibord die ik in mijn lessen gebruik, allemaal in deze ene les naar voren. Ook de interactie met de leerlingen en het klassenmanagement gingen goed. Een goede les om bezoek te krijgen dus.

In de derde les van de dag gebeurde niets bijzonders. Na de eerste twee lessen was dat ook wel even prettig. Ook omdat ik wist dat mijn laatste les wel weer anders ging worden. In mijn 3 vwo-klas had ik wat moeite met orde houden. Daarom zou mijn coach een stukje van de les filmen, zodat we dit later konden bespreken. Achteraf kon ik meerdere redenen bedenken, maar tijdens de les stond ik versteld van het gedrag van mijn leerlingen. Ik had ze nog nooit zo rustig gezien! Het kwam misschien door de camera, of doordat ik de goed gemaakte toets snel had nagekeken, of doordat mijn coach de klas eerder op de dag flink op hun kop had gegeven... Het maakt eigenlijk niet uit wat de reden was, want het gaf mij wel het gevoel: het kan dus wel.
De film en het bespreken ervan hebben me niet gebracht wat ik ervan verwacht had. Ik dacht dat ik zou leren om beter orde te houden. Maar nee, ik heb ervan geleerd om anders naar mijn lessen te kijken. Sinds die les zie ik in de lessen aan deze klas steeds vaker momenten waarop het wel goed gaat en die gaan ook steeds langer duren.

Al met al een spannende en leerzame dag. En nu maar afwachten wat voor beoordeling ik krijg.

Over de auteur

Erika Bakker rondde in de zomer van 2014 haar Educatieve Master wiskunde af. Na een jaar stagelopen is ze dit schooljaar voor het eerst officieel docent wiskunde. E-mailadres: *erikabakker66@gmail.com*

HOORZITTING OVER REKENTOETS

Birgit van Dalen

De commissie van de Tweede Kamer voor Onderwijs, Cultuur en Wetenschap hield op woensdag 4 december een hoorzitting over de rekentoets. Maar liefst twintig experts en ervaringsdeskundigen waren uitgenodigd om hun visie te laten horen. De hoofdredactie van *Euclides* was aanwezig en doet verslag.

De hoorzitting opende met een blok waarin diverse experts die betrokken waren bij de ontwikkeling van de referentieniveaus of de rekentoets zelf, aan het woord kwamen. Weliswaar kwamen hier zeer verschillende geluiden naar voren, over één ding waren de meeste sprekers het eens: de rekentoets functioneert op dit moment niet zoals hij bedoeld is. Marja van den Heuvel-Panhuizen, hoogleraar reken-wiskundedidactiek bij het Freudenthal Instituut, merkte op dat er een discrepantie zit tussen de slechte resultaten bij de rekentoets en de vrij goede resultaten in het nieuwste PISA-onderzoek. Emeritus-hoogleraar didactiek Anne van Streun merkte iets vergelijkbaar op: 80% van de vmbo-leerlingen kiest wiskunde en rondt dat over het algemeen voldoende af, maar slechts 20% haalt een voldoende voor de rekentoets.

Dit punt werd nog verder uitgediept door Victor Schmidt, voorzitter van de Toetswijzercommissie 3F. Hij had een eigen mini-onderzoekje gedaan waarbij hij een fictief rekencijfer had berekend op basis van het centraal eindexamen wiskunde voor vmbo-basis. In dit examen zitten immers veel rekenvragen, vergelijkbaar met het 2F-niveau. Hij heeft deze vragen ingedeeld in de verschillende rekendomeinen en de gemiddelde scores op dezelfde manier gewogen als de domeinen bij de rekentoets gewogen worden. Op deze manier verkreeg hij een fictief gemiddeld rekencijfer, wat tot zijn verbazing ruim anderhalf punt hoger lag dan het gemiddelde cijfer voor de rekentoets onder vmbo-basisleerlingen. De conclusie kan alleen maar zijn dat de rekentoets op dit moment geen betrouwbaar beeld geeft van de rekenvaardigheden van de leerlingen.

Voor niet goed functioneren van de rekentoets gaven de diverse experts verschillende verklaringen, die niet door iedereen onderschreven werden. Misschien heeft de taligheid van de opgaven een grote invloed. Maar Victor Schmidt heeft ook woorden geteld in de rekentoets en het eindexamen en geconcludeerd dat de rekentoets minder talig is dan het eindexamen wiskunde en zeker veel minder talig dan het eindexamen van bijvoorbeeld biologie. Verder werd het steeds moeten schakelen tussen contexten genoemd: de rekentoets 3F bevatte afgelopen jaar maar liefst 48 contextvragen. Ook het niet kunnen terugbladeren tijdens de toets, het moeten werken op de computer (wat leerlingen over het algemeen niet gewend zijn bij rekenen en wiskunde) en de lange duur dat leerlingen geconcentreerd moeten blijven (twee uur bij 3F) zijn mogelijke oorzaken. Geert van Lonkhuyzen van het College voor Examens kon enkele lichtpuntjes voor de toekomst bieden: in 2014 komen er minder vragen en wordt het aandeel contextvragen iets kleiner; en er wordt gewerkt aan een nieuw computerprogramma waarmee terugbladeren wel



MEDEDELING



EERSTE RONDE VAN DE NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Van 20 t/m 30 januari vond de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats op vele scholen in Nederland. Elke school kon zelf de meest geschikte datum kiezen in deze periode. De opgaven en uitwerkingen van deze wedstrijd zijn inmiddels gepubliceerd op *www.wiskundeolympiade.nl*. Heeft u meegedaan met uw leerlingen? Dan kunt u op maandag 10 februari de uitslag in uw mailbox verwachten.

mogelijk is. Ook komt er vanaf 2014 een rapportage waarin leerlingen en scholen kunnen zien op welke domeinen ze slecht gescoord hebben. Het CvE houdt wel vast aan het geheimhouden van de opgaven zelf.

In het tweede blok van de hoorzitting kwamen docenten uit het voortgezet onderwijs aan het woord. Ook hier werd forse kritiek geuit op de vorm en inhoud van de huidige rekentoets. Volgens Karin den Heijer, docent aan het Erasmiaans Gymnasium Rotterdam, worden er andere vaardigheden getoetst dan rekenen en lijkt de toets ook in het niets op entreetoetsen die in het hoger onderwijs worden gebruikt. Vmbo-docent Willie de Wit gaf aan dat de toets vooral demotiverend werkt. Zo'n 50% van de vmbo-leerlingen heeft aan het begin van de middelbare school nog geen 1F-niveau en voor hen is opwerken naar 2F – en daarmee een diploma – zo goed als onhaalbaar. Door diverse aanwezigen werd beaamd dat het onderwijs nog niet voldoende is ingericht op het opbouwen en onderhouden van de rekenvaardigheden; daar mogen de leerlingen natuurlijk niet op afgerekend worden.

Daarnaast werd in dit blok de taligheid van contexten genuanceerd. Een context hoeft niet altijd talig te zijn, aldus Lonneke Boels, docent aan het Christelijk Lyceum Delft. De contexten zijn echter wel belangrijk, niet alleen omdat je die nou eenmaal in de praktijk tegenkomt, maar ook omdat het leerlingen kan helpen. Gert de Kleuver gaf een sprekend voorbeeld hiervan: één van zijn vmbo-leerlingen kon de som 4,5 : 3 absoluut niet oplossen, maar gaf onmiddellijk het goede antwoord toen Gert de vraag formuleerde als '4,50 euro verdelen over drie personen'. Juist de rekenzwakke leerlingen kunnen dus geholpen zijn door een context.

Dit punt werd bevestigd in het derde blok door Thijs Dam, mbo-docent. Hij gaf aan dat functioneel rekenen ontzettend belangrijk is in het mbo. Helaas zijn er heel veel mbo-opleidingen waar geen wiskunde meer gegeven wordt, maar daar is rekenen wel een apart vak en aandachtsgebied geworden. Als rekenspecialisten worden hier docenten van de pabo ingehuurd. Over het idee van rekenspecialisten waren de meningen onder de andere aanwezigen echter verdeeld. Een aantal mensen vond dat wiskundedocenten zelf de beste rekendocenten zijn. Maar onder andere Marian Kollenveld, voorzitter van de NVvW, merkte op dat wiskundedocenten niet altijd specialisten zijn op het gebied van rekenen en het wegwerken van rekenachterstanden. Vaak zijn docenten niet op de hoogte van de rekendidactiek die in het basisonderwijs gebruikt wordt, terwijl die kennis wel zou helpen om leerlingen in het voortgezet onderwijs beter te helpen. Scholing van wiskundedocenten op dit gebied is dus van groot belang.

Constructieve en creatieve oplossingen waren er ook. Willie de Wit opperde het idee om certificaten uit te geven op diverse rekenniveaus en misschien ook voor verschillende rekendomeinen. Zo is het voor elke leerling, ook op het vmbo, haalbaar om een certificaat te behalen, maar kost het de zwakke leerlingen niet hun diploma. Tegelijkertijd worden de leerlingen dan uitgedaagd om hun grenzen te verleggen: een goede vmbo-leerling kan proberen het 3F-niveau te behalen en een leerling die per se een bepaalde vervolgopleiding wil volgen, kan zich inzetten om op de domeinen relevant voor die opleiding een certificaat te halen.

Verder gingen er geluiden op om het rekenonderwijs onder te brengen in het vak wiskunde in de onderbouw. Wim Caspers, docent aan de TU Delft, trok een vergelijking met algebraïsche vaardigheden. Omdat die nodig zijn bij een technische opleiding aan de universiteit, worden er instaptoetsen en opfriscursussen gehouden aan het begin van de studies. Dat wordt niet opnieuw getoetst tegen de tijd dan een student eindexamen doet. Wat betreft rekenen zou je op een vergelijkbare manier aan het begin van het voortgezet onderwijs een instaptoets kunnen geven en vervolgens leerlingen in de eerste jaren kunnen bijspijkeren.

Ook Jan Karel Lenstra hield een pleidooi voor het onderbrengen van rekenen in het vak wiskunde en bovendien de contexten aan te brengen via integratie met vakken als natuurkunde en economie. Een aparte toets is dan niet meer nodig. Verder merkte Anne van Streun als oud-lid van de commissie Meijerink op dat de referentieniveaus rekenen nooit bedoeld waren om een rekentoets op te baseren. Samen met Jan van de Craats, het andere oud-lid van de commissie Meijerink, vond hij dat de huidige rekentoets absoluut niet aansluit bij de referentieniveaus. Zijn voorstel, dat veel bijval kreeg, is om een nieuwe commissie op te richten met onder andere een aantal mensen van de commissie Meijerink erin, om zich nog eens goed te buigen over hoe de referentieniveaus het beste getoetst zouden kunnen worden.

De genodigden voor de hoorzitting hebben hun standpunt niet alleen mondeling, maar ook op papier ingediend bij de commissie van de Tweede Kamer. Op de website van *Euclides* hebben we een aantal van deze documenten verzameld, zodat de verschillende perspectieven nog eens uitgebreid belicht worden. Zie *vakbladeuclides.nl/894hoorzitting.pdf*

Over de auteur

Birgit van Dalen is docent wiskunde op het Aloysius College in Den Haag en daarnaast betrokken bij de organisatie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en de training van leerlingen voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Ook is zij adjunct-hoofdredacteur van *Euclides*. E-mailadres: *bevandalen@gmail.com*

GETUIGEN

PIETER VENEMA

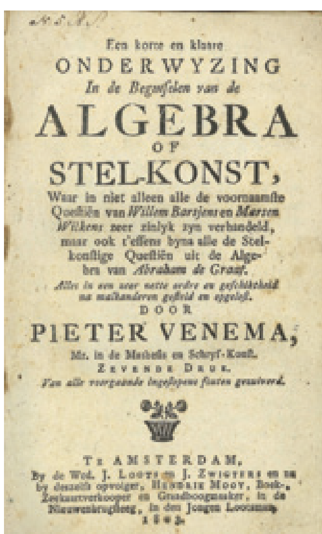
Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie 'Getuigen' behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



De achttiende-eeuwse schrijf- en rekenmeester Pieter Venema is zo goed als vergeten; zijn algebraboek is in vergetelheid geraakt. Gedurende de achttiende eeuw was 'de algebra van Venema' echter een begrip: na de eerste druk uit 1714 volgden vele herdrukken. In elk geval tot en met de editie van 1803 werden die ook actief in het onderwijs gebruikt, hetgeen valt af te leiden uit dagboeken en uitgewerkte edities van het werk – alsmede uit kopieën; een ongekend groot succes voor een algebraboek uit die tijd. Deze publicatie en het leven van Venema kunnen zodoende model staan voor het Nederlandstalige onderwijs in de algebra in de achttiende eeuw. Alleen dat al maakt het de moeite waard om een blik te werpen in leven en werken van deze bijzondere Groningse rekenmeester.

Sinds 1703 stond Venema op de lijst van de stad Groningen van mensen aan wie het was toegestaan om les te geven. Hij ontving zelfs enkele jaren 'Duytsche schoolgeld', hetgeen betekende dat hij door de stedelijke vroedschap als schoolmeester werd ingehuurd voor onderwijs in het Nederlands (Nederduits) lezen, schrijven en rekenen. Het schoolgeld was veelal een particuliere aangelegenheid, maar in sommige gevallen betaalde de gemeente, bijvoorbeeld in het kader van het onderwijs aan wezen. Onderwijs in het rekenen was niet gebruikelijk, en kostte ook meer. Alleen leerlingen die dat in hun latere leven nodig hadden, kregen dit onderwijs, veelal toegespitst op de rekenregels die ze in hun latere professie zouden tegenkomen. Sommige schoolmeesters, zoals Venema, specialiseerden zich juist in de reken- en wiskunde, en mikten daarmee op een publiek dat zich iets meer geld kon veroorloven.



Een korte en klaare
ONDERWYZING
In de Beginselen van de
ALGEBRA
OF
STELKONST,
Waar in niet alleen alle de voornaamste Questiën van *Willem Bartjens* en *Marten Wilkens* zeer zinlyk zyn verhandeld, maar ook t'effens byna alle de Stelkonstige Questiën uit de Algebra van *Abraham de Graaf*.
Alles in een zeer nette ordre en geschiktheid na malkanderen gesteld en opgelost.
DOOR
PIETER VENEMA,
Mr. in de Mathesis en Schryf-Konst.
ZEVENDE DRUK.
Van alle voorgaande ingeslopene fouten gezuiverd.

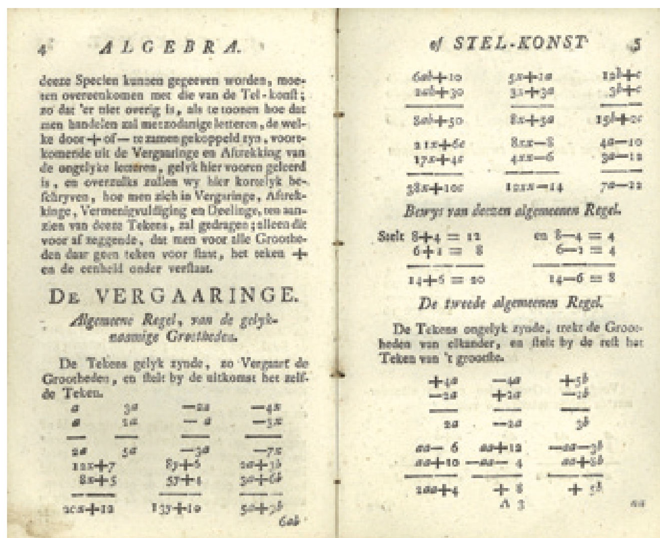
TE AMSTERDAM,
By de Wed. J. Loots en J. Zwigters en na by derzelfs opvolger, Hendrik Mooy, Boek-, Zeekaartverkooper en Graadboogmaaker, in de Nieuwenbrugsteeg, in den Jongen Lootsman,
1803.

figuur 1 titelpagina *Een kort en klare onderwijsinge in de beginselen van de algebra*

Met *Een kort en klare onderwijsinge in de beginselen van de algebra* uit 1714 richtte Venema zich direct tot zijn publiek. Reeds op het titelblad maakte hij duidelijk dat zijn boek bestudering van een aantal bekende rekenboeken uit zijn tijd volkomen overbodig maakte. Door aan zijn boek een appendix toe te voegen, waarin 'zijn' opgaven werden gekoppeld aan opgaven uit die bekende rekenboeken verleende hij die bewering geloofwaardigheid. In het voorwoord richtte hij zich vervolgens tot de hem goedgunstige hoogwaardigheidsbekleders. Hij bedankte de burgemeesters van de stad Groningen omdat zij hem als schoolmeester hadden toegelaten, en hem later een positie als schoolmeester in Oude Beerta gunden. Daarna legde hij uit dat hij als eenvoudig rekenmeester deze kennis van God had gekregen, en het dus als zijn opdracht zag om de *Onderwijsinge* op deze manier te publiceren. Op zich waren dit methodes die meer auteurs gebruikten. Ook het lofdicht dat in het voorwerk was geplaatst past in dat beeld. In dat lofdicht werden alle elementen die door de auteur op het titelblad en voorwoord werden genoemd nog eens kracht bijgezet:

Regt schandre Venema, dat past een regte Borger,
Dat past een waare Christ, dat hy zy een besorger,
Van synes naasten best, dat hy bekommert zy
Voor welstant van 't gemeen, van jeder een daar by

Eind jaren twintig van de achttiende eeuw emigreerde Venema naar New York. Daar gaf hij lessen in de rekenkunde en algebra. Het eerste algebraboek dat in de nieuwe wereld werd gepubliceerd was van zijn hand.


4 ALGEBRA.

deeze Specien kunnen gegeeven worden, moeten overeenkomen met die van de Tel-konst; zo dat 'er niet overig is, als te toonen hoe dat men handelen zal met zodanige letteren, de welke door + of – te zamen gekoppeld zyn, voorekomende uit de Vergaaringe en Aftrekking van de ongelyke letteren, gelyk hier vooren geleerd is, en overzulks zullen wy hier kortelyk beschryven, hoe men zich in Vergaaringe, Aftrekkinge, Vermenigvuldiging en Deelinge, ten aanzien van deeze Tekens, zal gedragen; alleen dit voor af zeggende, dat men voor alle Grootheden daar geen teken voor staat, het teken + en de eenheid onder verstaat.

DE VERGAARINGE.

Algemeene Regel, van de gelyknaamige Grootheden.

De Tekens gelyk zynde, zo Vergaart de Grootheden, en stelt by de uitkomst het zelfde Teken.

a	3a	−2a	−4x
a	2a	− a	−3x
2a	5a	−3a	−7x

of STEL-KONST 5

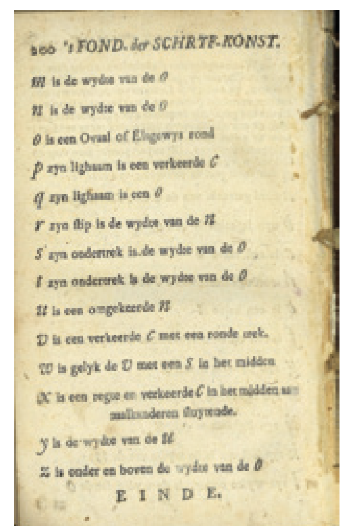
Bewys van deezen algemeenen Regel.

Stelt 8+4 = 12 en 8−4 = 4
6+2 = 8 6−2 = 4
14+6 = 20 14−6 = 8

De tweede algemeene Regel.

De Tekens ongelyk zynde, trekt de Grootheden van elkander, en stelt by de rest het Teken van 't grootste.

+4a	−4a	+5b
−2a	+2a	−2b
2a	−2a	3b


200 't FOND. der SCHRYF-KONST.

m is de wydte van de o
n is de wydte van de o
o is een Ovaal of Eiigewys rond
p zyn lighaam is een verkeerde c
q zyn lighaam is een o
r zyn slip is de wydte van de n
s zyn onderrek is de wydte van de o
t zyn onderrek is de wydte van de o
u is een omgekeerde n
v is een verkeerde c met een ronde trek.
w is gelyk de v met een s in het midden
x is een regte en verkeerde c in het midden aan malkanderen sluytende.
y is de wydte van de u
z is onder en boven de wydte van de o

E I N D E.

figuur 2 fragment de Vergaaringe in *Een kort en klare onderwijsinge in de beginselen van de algebra*

figuur 3 fragment *Een kort en klare onderwijsinge in de beginselen van de algebra*

Het verscheen in 1730 onder de titel *Arithmetica of Cyffer-Konst, volgens de munten maten en gewigten, te Nieu-York, gebruykelyk. Als mede Een kort ontwerp van de Algebra*. Zoals de titel al doet vermoeden, bevatte het, naast een uitvoerige behandeling van het rekenen, een samenvatting van de *Onderwijzinge*.

In New York maakte hij deel uit van de gemeenschap van rekenliefhebbers. Zoals bij zijn status hoorde, loste hij bijvoorbeeld opgaven op die in de *New York Journal* verschenen. Uit zijn publicatie valt op te maken dat hij zijn school voortzette in de nieuwe wereld, maar er zijn verder weinig gegevens met betrekking tot hem te traceren. Venema overleed in 1748 en werd begraven in de Nederlandse kerk in New York. Zijn algebraboek was ondertussen in zijn oude vaderland aan een triomftocht begonnen.

Venema behandelde de algebra aan de hand van recepten of rekenwetten die de leerling moest eerbiedigen. Als hij die wetten juist naleefde, zou de juiste uitkomst eruit naar voren komen. De passage over de optelling van twee algebraïsche grootheden sprak boekdelen. Daarin werd de lezer eerst geleerd om algebraïsche grootheden op te tellen waarvan de tekens (+ of –) gelijk waren. Dat deed je door alleen te kijken naar de coëfficiënten, die bij elkaar op te tellen, en daarna achter de uitkomst weer de grootheid (de letters) te plaatsen, en ervoor het gemeenschappelijke teken. Met de bijgevoegde voorbeelden ($3a + 2a = 5a$, $-4x - 3x = -7x$) en een 'bewijs' van deze regel, bestaande uit een paar getalvoorbeelden, wist de leerling genoeg. Waren de tekens niet gelijk, dan trok je de coëfficiënten van elkaar af, kwam wederom de grootheid erna en het teken van de grootste coëfficiënt ervoor.

De eerste 56 pagina's besloegen een theoretische behandeling in deze sfeer, waarin de lezer voorschriften kreeg aangereikt die hem zeer specifieke problemen hielpen oplossen. Dat ging met name over het rekenen met letters, het trekken van vierkants- en derdemachtswortels (ook uit lettersamenstellingen), en het oplossen van lineaire en vierkantsvergelijkingen. Stelsels vergelijkingen met twee en drie onbekenden kwamen ook aan bod. Het grootste deel van het boek, pagina 57 tot en met 187, werd vervolgens besteed aan opgaven, waarbij in eerste instantie een probleem moest worden omgewerkt tot een vergelijking. Dat deed Venema door middel van voorbeelden en hier kwamen de rekenopgaven uit de boeken van zijn concurrenten ook aan bod. Wat Venema liet zien was dat algebra een krachtig instrument bood, waarmee getallen konden worden berekend die aanvankelijk niet bekend waren. Dat kon ook met bekende rekenregels, maar de algebra die hij aanbood voldeed om een grote verscheidenheid aan rekenregels mee samen te vatten – en kon zelfs meer, zo liet hij zien. Voor veel van zijn lezers school daarin precies de aantrekkelijkheid van het rekenen met letters.

Het algebraboek van Venema laat fraai zien hoe (en waarom) algebra in de achttiende eeuw werd onderwezen, en tevens dat het veelal werd onderwezen door docenten die ook andere vakken moesten aanbieden om voldoende leerlingen te kunnen bedienen. Met name de laatste pagina's, waarin de auteur een uitstapje maakt naar de schrijfkunst, verraden dat Venema ook leerlingen les gaf in het (schoon)schrijven. 'Meester in de Mathesis en Schrijfkunst' noemde hij zichzelf nadrukkelijk op het titelblad. Een reden te meer om deze oude Groningse rekenmeester aan de vergetelheid te ontrukken.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

STRAATTEKENINGEN ONTWIKKELEN MET EEN THEEDOOSJE

Roel Zuidema

PROJECTIEVE MEETKUNDE

Roel Zuidema schreef een lessenserie waarin leerlingen een paar basisconstructies uit de projectieve meetkunde leren en daarmee praktisch aan de slag gaan. Ze ontwikkelen namelijk hun eigen straattekening op een A4'tje. Met dit project stond Roel op de Nationale Wiskundedagen 2014 omdat het hem de prijswinnende werkgroep opleverde.

Inleiding

Op de school waar ik tot voor kort werkte, wordt in de vijfde klas een periode projectieve meetkunde gegeven. Dat houdt in dat leerlingen drie weken lang twee uur per dag aan dit onderwerp werken. Toen ik in schooljaar 2011/2012 alledrie de vijfde klassen die de school telde deze periode mocht geven, was ik vrij in de invulling. Ik ben op zoek gegaan naar een mengeling uit de 'klassieke vrije-school-aanpak', zoals ik die van collega's aangereikt kreeg en een concreet project, waarin leerlingen meetkundige constructies kunnen omzetten. Dat heeft uiteindelijk geleid tot een lessenserie, die ik zelf interessant vind en waar leerlingen met veel plezier aan werkten.
In dit artikel beschrijf ik de projectkant van deze lessenserie, waarin de basis wordt gelegd voor het ontwikkelen van straattekeningen. Hoewel ik terdege besef dat de projectieve meetkunde niet tot de standaardlesstof behoort, ben ik ervan overtuigd dat het inhoudelijk interessante mogelijkheden biedt voor speciale projecten of een uitgangspunt kan zijn voor profielwerkstukken.

Een concreet project

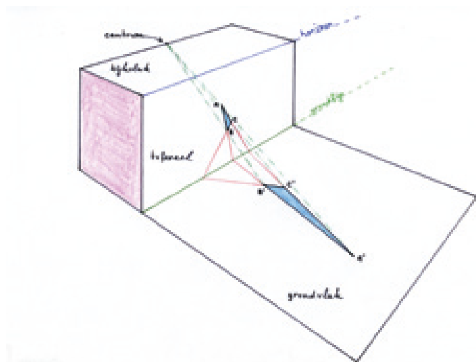
Bij het begrip *projectieve meetkunde* kwam bij mij al snel een plaatje uit het boek *Lessen in Projectieve Meetkunde* van Martin Kindt voor de geest. Hierin spelen grondvlak, tafereel, grondlijn, horizon en het centrum de hoofdrol, en delen grondlijn en horizon een blad papier in een zogenaamd drieluik. Bij projecties worden objecten uit het grondvlak op het tafereel geprojecteerd en omgekeerd. Dit beeld vind ik sterk en mijn doel voor deze lessenserie was, dit beeld concreet te verbinden met een paar standaardconstructies uit de projectieve meetkunde. Het afbeelden op het grondvlak leidde mij al snel naar het idee van straattekeningen, waarbij op straat vertekende afbeeldingen getekend worden, die vanuit een bepaald zichtpunt een driedimensionale illusie opwekken. Zulke beelden zijn in grote getalen te vinden op het internet. De betovering van deze schitterende beelden laat leerlingen, zo is mijn ervaring, zeker niet koud.

De PGC – het theedoosje

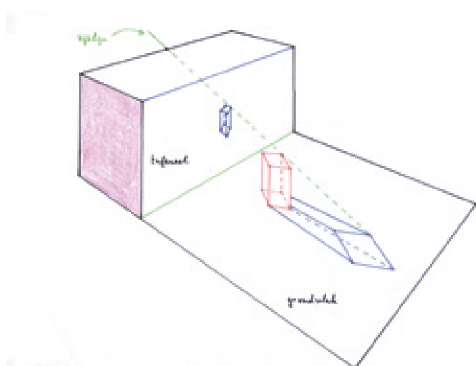
Bij het ontwikkelen van een straattekening met behulp van het drieluik van Kindt hebben we te maken met het driedimensionale object, de projectie ervan op het tafereel en de projectie ervan op het grondvlak. In eerste instantie liet ik de leerlingen met vlakke figuren het verband tussen de beide projecties ontdekken. Daarna ontwikkelden we de tekeningen tot straattekeningen: tekeningen in het grondvlak, die een ruimtelijke illusie oproepen, wanneer je ze vanuit het centrum bekijkt. Om de samenhang tussen de projecties in het tafereel en op het grondvlak te kunnen bepalen en onderzoeken, moeten de locatie van het zichtpunt (centrum) en die van het tafereel ten opzichte van het grondvlak vastgelegd worden. In deze fase heb ik een tijdje nodig gehad om een goede manier te vinden om het drieluik inzichtelijk op te bouwen en met passende oefeningen de projecties met elkaar te verbinden.
Het eureka-moment kwam toen ik een leeg theedoosje in mijn handen had. Een A4-papier past namelijk prima om zo'n doosje heengevouwen en een theedoosje tref je in elk huishouden wel aan. Het idee van de 'Projectieve Geometrie Camera', de PGC, was geboren en ontwikkelde zich toen snel. Na de bouw van de PGC heb ik de leerlingen in drie stappen laten ontdekken hoe punten en lijnen vanuit het tafereel op het grondvlak worden afgebeeld en omgekeerd. Daarmee was de basis voor het ontwerpen van een straattekening gelegd.

Recept: bouw van de PGC

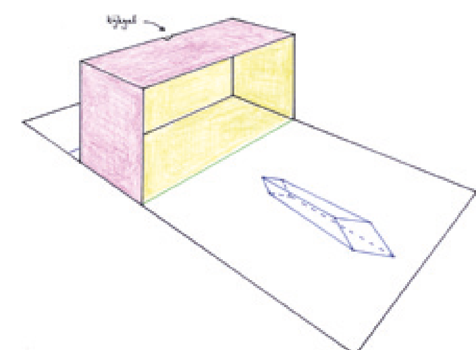
Neem een leeg theedoosje. Knip een van de beide grootste vlakken van het doosje open: het tafereelvlak van de camera, dat verticaal opstaat wanneer je de camera neerzet. Maak in het midden van de lange bovenste ribbe, die niet in het tafereelvlak ligt, een gaatje. Begin met een passerpunt, maar vergroot het gat langzaam, totdat er een potlood doorheen kan. Dit is het kijkgat, het centrum van de PGC.
Het papier waarop je gaat tekenen moet op de afmetingen



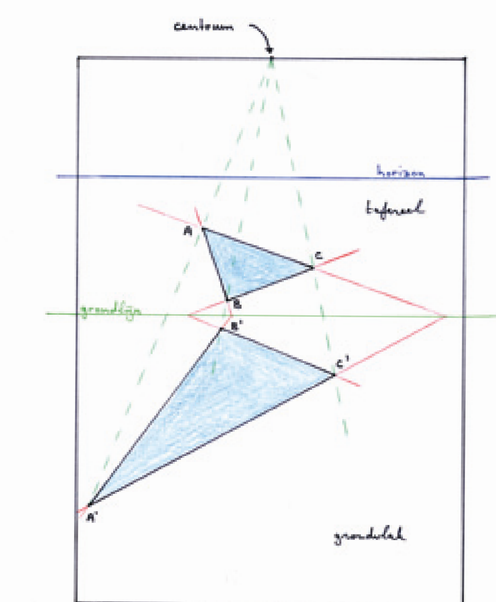
figuur 1 een centrale projectie in het drieluik met kijkvlak, tafereel en grondvlak



figuur 2 een balkje op het grondvlak met projectie op tafereel en grondvlak



figuur 3 het bekijken van de projectie in het grondvlak door de PGC levert de driedimensionale illusie van het balkje uit figuur 2



figuur 4 de stelling van Desargues en de PGC

van de camera worden afgestemd. Vouw een papier met strakke lijnen, de horizon en de grondlijn, om de camera en geef met een punt op de korte zijde het centrum aan. Het blad is nu in drie rechthoeken verdeeld: het ‘kijkvlak’, het tafereel en het grondvlak.

Stap 1: de verkenning – Om te ontdekken hoe tekeningen in het tafereel op het grondvlak worden afgebeeld, snijden de leerlingen uit het tafereel een driehoek *ABC*. Ze vouwen het papier om de PGC en kijken door het kijkgat van de camera om te kijken waar de driehoek *A′B′C′* op het grondvlak wordt afgebeeld. Het is een uitdaging om dat zo precies mogelijk te doen. Als de beide driehoeken getekend zijn, tekenen ze op het vlak gelegde blad papier de lijnen *AA′*, *BB′* en *CC′*, die alledrie door het centrum gaan. Ook tekenen ze de punten *AB*-*A′B′*, *AC*-*A′C′* en *BC*-*BC′* en ontdekken, dat deze punten op de grondlijn liggen. Deze tekening is een schitterende toepassing van de stelling van Desargues:

Als van twee driehoeken *ABC* en *A′B′C′* de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten (*AA′*, *BB′* en *CC′*) door één punt (centrum) gaan, dan liggen de drie snijpunten van de overeenkomstige zijden in één lijn (grondlijn).

Stap 2: kalibratie van de PGC – Zodra de stelling van Desargues door de leerlingen begrepen is, merkt men het volgende op: Wanneer in een constructie het centrum en de grondlijn vastgelegd zijn, heeft men slechts één puntenpaar (*A* in het tafereel en de afbeelding A′ in het grondvlak) nodig om andere punten uit het tafereel in het grondvlak en omgekeerd vanuit het grondvlak in het tafereel af te beelden. Men hoeft dus geen hele driehoek uit te snijden om te weten hoe deze wordt afgebeeld op het grondvlak. Het volstaat om een punt af te beelden. Dat punt is eenvoudig af te beelden, door met een passerpunt een klein gaatje in het tafereel (punt *A*) te prikken en vervolgens door de PGC de afbeelding (punt *A′*) te zoeken. Wanneer de leerlingen nu een blad maken, waarop het centrum, de horizon, de grondlijn en het puntenpaar *A* en *A′* zijn ingetekend, hebben ze als het ware een kalibratieblad, dat bij hun eigen PGC hoort. Nu kunnen ze elk punt uit het tafereel in het grondvlak afbeelden (mits het binnen het blad papier valt).
Een goede oefening is die waarbij in het tafereel een vierhoek wordt getekend waarbij de tegenoverliggende zijden elkaar op de horizon snijden. Ontdekken de leerlingen, dat de afbeelding in het grondvlak een parallellogram is? En waarom dat zo is? Men kan in deze fase natuurlijk bespreken, waarom die ene lijn in de tekening de horizon wordt genoemd. Ook is het leuk om bij het bespreken van de horizon een paar mooie vakantiefoto’s aan de kust te laten zien, waarbij de horizon zo mooi zichtbaar is. Een andere interessante oefening is het laten afbeelden van verschillende cirkels in het tafereel en dit

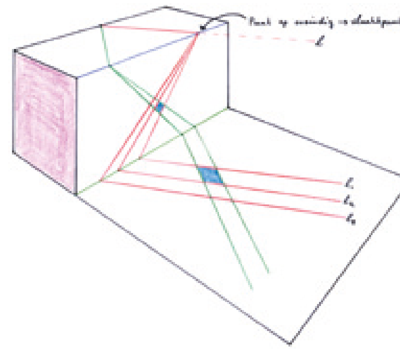
te verbinden met kegelsneden. Daarop ga ik in dit artikel niet verder in.

Stap 3: weg met de gaatjes – De afmetingen van het theedoosje leggen de *homologie* van het drieluik volledig vast. Men kan zich afvragen of het dan wel nodig is een puntenpaar *A* – *A'* met behulp van een passergaatje in het tafereel te bepalen. Het antwoord op die vraag is, dat het inderdaad overbodig is. En met de voorafgaande oefeningen kunnen de leerlingen ook begrijpen waarom. Twee evenwijdige lijnen in het grondvlak l_1 en l_2 hebben één punt gemeenschappelijk: een punt op oneindig. In het tafereel wordt dit punt zichtbaar als vluchtpunt op de horizon. Een derde lijn l_0, evenwijdig aan de eerste twee maar niet in het grondvlak gelegen, gaat door hetzelfde oneigenlijke punt en zodoende in het tafereel door hetzelfde vluchtpunt. Dat betekent dat een lijn l_0 in het kijkvlak en door het centrum, in het tafereel het vluchtpunt bepaalt van alle afbeeldingen van aan l_0 evenwijdige lijnen l_i in het grondvlak. Een lijn *a* door het centrum legt nu elk willekeurig puntenpaar *A* – *A'* vast.

Straattekeningen

Nu de leerlingen probleemloos punten uit het tafereel in het grondvlak en in omgekeerde richting kunnen afbeelden, wordt het tijd om een eerste straattekening te maken. Een goede oefening daarbij is het construeren van een kubus. De kubus kan daarna als basis voor vele andere tekeningen dienen. In het volgende voorbeeld beschrijf ik de stappen van de constructie, waarbij één hoekpunt van de kubus op de grondlijn ligt. Daarbij laat zich de hoogte van de kubus iets aanschouwelijker bepalen.

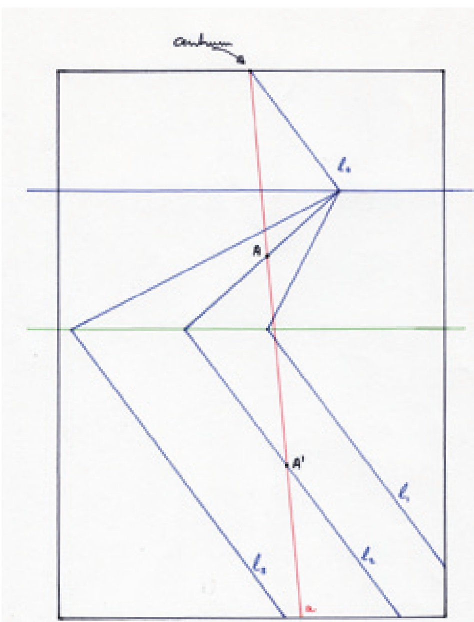
Een kubus construeren – Teken in het grondvlak de plattegrond van de kubus (vierkant) en vervolgens de bijbehorende afbeelding in het tafereel. Wanneer een dobbelsteen op het grondvlak tegen het tafereel aange-

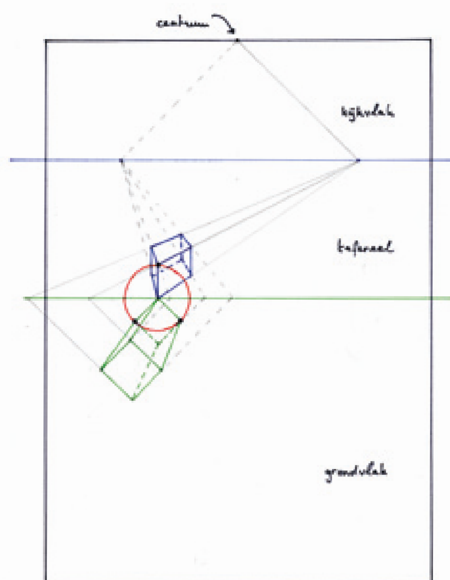


figuur 5 het gemeenschappelijke punt van parallelle lijnen in het kijkvlak en het grondvlak is in het tafereel zichtbaar als vluchtpunt op de horizon

legd wordt, is eenvoudig in te zien dat de hoogte van de zijden boven de grondlijn in het tafereel gelijk is aan de vierkantszijden van de plattegrond. Construeer met dit inzicht en met behulp van een passer de hoogte van de kubuszijde boven de grondlijn en vervolgens de rest van de kubus in het tafereel. De vier punten in het bovenvlak van de kubus kunnen nu vanuit het tafereel in het grondvlak afgebeeld worden, waarmee de afbeelding van de kubus in het grondvlak volledig is. Niet veel ingewikkelder is het de kubus op een andere plaats op het grondvlak te construeren. Daarbij moet ook weer de zijdelengte vanuit het grondvlak met passer op het tafereelvlak worden overgedragen. Die stap laat ik graag aan de lezer over.

Door de PGC kijken – Bij de constructie van de kubus is de PGC niet gebruikt, behalve dat de afmetingen van het doosje de locatie van de horizon en de grondlijn ten opzichte van het centrum hebben bepaald. Nu de tekening af is, kunnen we haar door de PGC bewonderen en de ervaring van een driedimensionaal object beleven. Daartoe moet de PGC zodanig op het blad papier gezet worden, dat het kijkgat samenvalt met de locatie van het centrum, wanneer het blad om de camera heen gevouwen zou zijn. De grondlijn van de camera valt daarbij precies samen met de grondlijn op de tekening. In de situatie van figuur 3 is door het kijkgat het rode balkje uit figuur 2 te zien. Zonder camera kun je met het oog het kijkpunt zoeken en



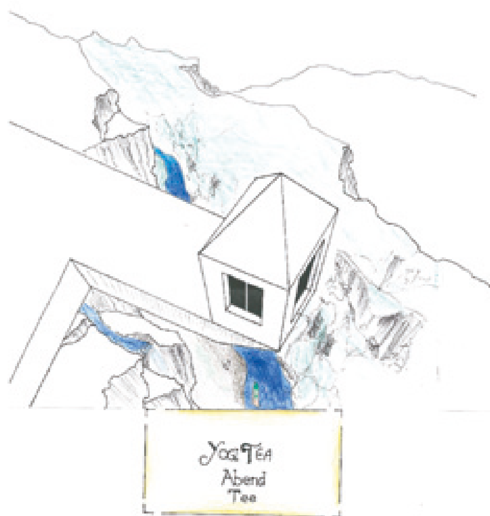


figuur 6 met behulp van parallelle lijnen in kijkvlak en grondvlak kan men punten uit het tafereel in het grondvlak afbeelden en omgekeerd.

figuur 7 de drie even lange kubuszijden in de drie richtingen zijn eenvoudig te construeren wanneer een hoekpunt van de kubus op de grondlijn staat

de kubus of balk driedimensionaal zien. Het kijken door de PGC versterkt echter het effect, doordat het kijkpunt vastligt. Daarbij voegt het kijken door de camera een speciaal belevingseffect toe, mede doordat het zichtveld zich tot de tekening beperkt. De ervaringen zijn overdonderend.

Een rijke speeltuin – Met de kubus als basis kan de creativiteit van de leerling nu zijn weg gaan. Tekent hij verschillende blokken naast en achter elkaar? Probeert hij een huis te tekenen? Of gaat hij experimenteren met het tekenen van schaduwen? In de creatieve wereld liggen tal van mogelijkheden open. In figuur 8 ziet u een tekening van een leerling, die geëxperimenteerd heeft met een wiskundige vorm in een natuurlijke omgeving.



figuur 8 het werk van een leerling: een blokvormige woning boven een ravijn

Ervaringen uit de les

De leerlingen vinden het heerlijk om met deze stof aan de slag te gaan. Ze worden uitgedaagd over de verschillende elementen (punten, lijnen en vlakken) in de ruimte na te denken, precies te tekenen en veel geduld te hebben. Hoe makkelijk alles er ook uitziet, het vergt een nauwkeurige werkhouding. De frustratie soms een paar keer opnieuw te moeten beginnen, kan dan ook erg groot worden, maar de voldoening als het lukt, maakt veel goed. Een enkele leerling beweert ineens veel liever algebraïsch te werken, maar de meesten genieten van de vrije creatieve ruimte en de uitdaging iets moois te maken. Wie de tijd heeft de camera grondig bij de leerlingen te introduceren, heeft daarna gegarandeerd een serie lessen waarbij stil en geconcentreerd gewerkt wordt.

Literatuur en referenties

Stolzenburg, A. (2009). *Projektive Geometrie, 1. Druck,* Stuttgart: edition waldorf.
Kindt, M. (1996). *Lessen in Projectieve Meetkunde.* Utrecht: Epsilon Uitgaven.
Edwards, L. (2003). *Projective Geometry.* Floris Books.
zie ook *www.fisme.science.uu.nl/nwd* voor de workshop tijdens de NWD 2014

Over de auteur

Roel Zuidema is tijdens zijn studie aan de TU Delft begonnen met lesgeven aan het Stanislascollege Pijnacker (2004-2008). Aansluitend heeft hij tweeënhalf jaar lesgegeven aan de Vrije School Den Haag. Januari 2011 verhuisde hij naar Zwitserland, waar hij tweeënhalf jaar aan de Atelierschule Zürich werkzaam was. Vanaf schooljaar 2014/2014 geeft hij les aan de Kantonschule Alpenquai in Luzern. E-mailadres: *ZuidemaCH@gmail.com*

KLEINTJE DIDACTIEK

ALGEBRAISCHE VAARDIGHEDEN OEFENEN

figuur 1 voorbeeld van een uitwerking van een leerling uit 6 vwo wiskunde A. De uitwerking is zowel fout als omslachtig.

In *Getal en Ruimte* staan veel oefenopgaven om de algebraïsche vaardigheden van leerlingen te trainen en verbeteren. Tot mijn grote frustratie hielp al dat eindeloos oefenen (en fouten verbeteren!) nauwelijks. Op korte termijn leidt het wel tot enig resultaat, maar een maand later op de toets is veel weer vergeten. Dit jaar doe ik het anders. Eenmaal per week laat ik leerlingen in tweetallen één opgave uitwerken en inleveren. De les erna staan deze in een PowerPoint. De vraag aan de leerlingen: is deze uitwerking goed en zo nee, wat is er dan niet goed? Ik zorg dat er altijd minstens één correcte uitwerking tussen zit.
De eerste week kreeg ik acht briefjes terug met zeven foute of onvolledige uitwerkingen, zie figuur 1. De tweede week kreeg ik negen briefjes terug met drie foute of onvolledige uitwerkingen. Op korte termijn lijkt het dus te werken. Tegen het einde van het schooljaar kan ik u vertellen of het ook op lange termijn werkt. Met dank aan mijn collega Inge Verhoev voor het idee.

Lonneke Boels

HET FIZIER GERICHT OP...

Paul Drijvers

HET KLEIN-PROJECT

In FIzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering belicht Paul Drijvers het Klein-project, dat beoogt wiskundeleraren op een inspirerende manier in contact te brengen met 'echte' en eigentijdse wiskunde.



Felix Klein (1849-1925) was een groot en veelzijdig wiskundige, die als hoogleraar onder andere werkzaam was in Göttingen. Zijn vakgebieden waren meetkunde en functietheorie; het meest bekend bij een groter publiek is hij wellicht door de 'fles van Klein', een voorbeeld van een niet-georiënteerd oppervlak. Net als bijvoorbeeld Freudenthal begon Klein zich gedurende zijn loopbaan in toenemende mate voor wiskundeonderwijs te interesseren. In 1908 werd hij de eerste voorzitter van de *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) en publiceerde hij zijn driedelige boek *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Uitgangspunt van dit boek is dat docenten recente ontwikkelingen in de hogere wiskunde zouden moeten kennen.

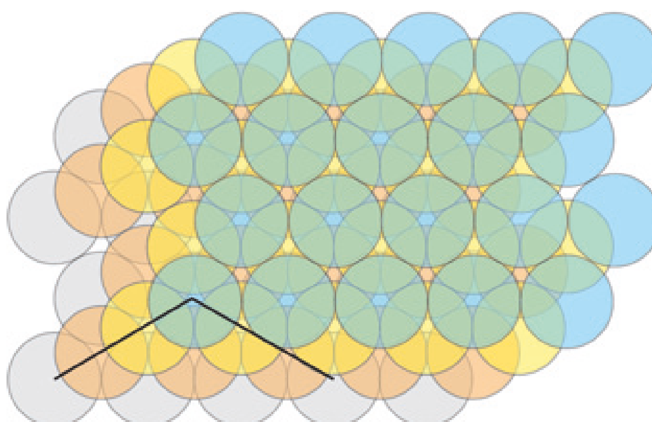
Het Klein-project is een nieuwe manier om deze ambitie vorm te geven. In 2008, een eeuw dus na het verschijnen van Kleins boek, is het van start gegaan als samenwerkingsverband tussen de *International Mathematical Union* (IMU, ook de initiator van Mathematics of Planet Earth) en het hierboven genoemde ICMI. Het doel van dit project is om, in de geest van Klein zelf, materiaal te ontwikkelen dat wiskundedocenten helpt om de breedte en de vitaliteit van het hedendaagse wiskundeonderzoek te ervaren en daardoor beter contact te houden met wiskunde als discipline. Hopelijk heeft dit ook invloed op de lespraktijk. Immers, vrijwel alle wiskunde die op school wordt onderwezen, is van vóór de tijd van Klein en is dit niet jammer?

Een van de belangrijkste manieren van het Klein-project om deze doelen te realiseren, is het ontwerpen en publiceren van zogeheten vignettes. Een vignette is een korte tekst (8-10 pagina's) die zich richt op wiskundestudenten of wiskundeleraren en waarin een belangrijke recente ontwikkeling in de wiskunde toegankelijk wordt gemaakt. Denk aan onderwerpen zoals de wet van Benford, zoekalgoritmes van Google, of cryptografie. Deze vignettes hebben meestal een concreet en aansprekend probleem als vertrekpunt. Ze beogen een kijk te geven op het werk van de wiskundige en inspirerend te zijn voor de lespraktijk. De meeste zijn geschreven door wiskundigen, soms in samenwerking met een docent VO. Op *http://blog.klein-project.org/* vindt u een overzicht van de vignettes die op dit moment beschikbaar zijn.

Een van de vignettes gaat bijvoorbeeld over het stapelingsprobleem: hoe kun je zo veel mogelijk sinaasappels in een doos stapelen? Dat is aanleiding tot denken in lagen en tot goniometrische berekeningen. Het aardige is dat aan het einde resultaten aan de orde komen die pas in de 21ste eeuw zijn bewezen. Eigentijdse wiskunde dus!

figuur 1: het stapelen van sinaasappels in lagen





Toch is het niet eenvoudig om vignettes te schrijven die aan de hoge ambities van het Klein-project beantwoorden. In een aantal van de vignettes is de presentatie in mijn ogen vrij klassiek. Wiskundigen houden van elegante redeneringen en compacte notaties. Dat is ook de kracht van de wiskunde, dat zijn verworvenheden. Maar in sommige gevallen leidt dit tot 'steile' abstracties, die niet altijd even toegankelijk zijn voor een docent die zich na zijn wiskundeopleiding nauwelijks meer met wiskunde op dit niveau heeft beziggehouden. Dit neemt niet weg dat er een aantal mooie vignettes is ontwikkeld.
Ook in Nederland kennen we initiatieven om het contact tussen de wereld van de wiskunde en die van het wiskundeonderwijs te bevorderen. Denk bijvoorbeeld aan het Platform Wiskunde Nederland of aan de Nationale Wiskundedagen. Net als in het Klein-project vraagt het 'vertalen' van ideeën uit een NWD-lezing naar de lespraktijk echter nog wel wat werk van een docent. In de Zebra-boekjes (die in veel gevallen door een duo van een wiskundige en een leraar worden geschreven) en bij de wiskunde B-dag is de wiskunde al als lesmateriaal vormgegeven, wat natuurlijk handig is.

Wat kunt u zelf doen in het kader van het Klein-project? Natuurlijk allereerst zelf vignettes lezen die online beschikbaar zijn op *blog.kleinproject.org*. Maar er is meer. Misschien heeft u ideeën over of ervaringen met het onderwerp van een van de vignettes in de klas? Deel die dan met uw collega's, via *Euclides* of via de site van het project. Of bent u lerarenopleider die studenten kan inzetten bij het vertalen van een Engelstalig vignette in het Nederlands of bij het omwerken van een vignette tot concrete lesplannen? Of bent u de wiskundige die in staat is om een essentieel element van het eigen vakgebied om te zetten in een mooi nieuw vignette? Kortom, er zijn allerlei manieren om u door het Klein-project te laten inspireren. Ideeën of ervaringen zijn welkom bij ondergetekende!

Over de auteur

Paul Drijvers is universitair hoofddocent werkzaam bij het Freudenthal Instituut en toetsdeskundige bij Cito.
E-mailadres: *p.drijvers@uu.nl*

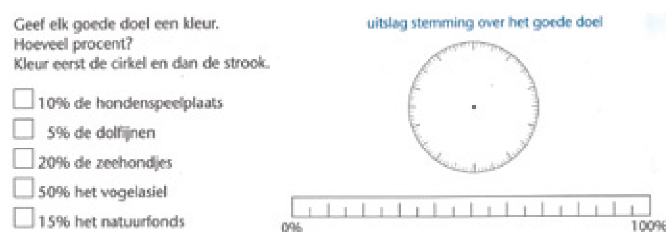
REKENDIDACTIEK EN LEERLIJNEN IN HET VO

Theresa Kleefsman

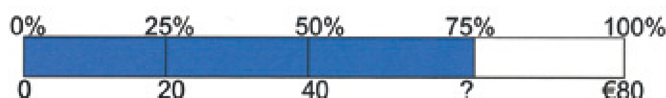
'Hoe hebben de leerlingen leren rekenen op de basisschool en welke didactiek past daarbij?' Met deze vraag kwam het Zernike College uit Groningen bij de Pedagogische Academie van de Hanzehogeschool, waarna een nascholingsprogramma is opgezet om aan de behoefte naar meer kennis en vaardigheden bij de rekendocenten tegemoet te komen. In dit artikel worden enkele zaken rondom didactiek van het rekenen en leerlijnen in het vo belicht, waarbij Theresa Kleefsman inzoomt op het onderwerp procenten.

Procenten in het basisonderwijs

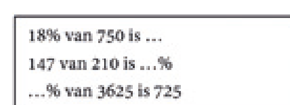
In het basisonderwijs begint de leerlijn procenten in groep 6 of 7. Eerst wordt de voorkennis geactiveerd vanuit plaatjes waarop procenten staan afgebeeld, of de leerlingen worden op pad gestuurd om zelf plaatjes van procenten te verzamelen. Vanuit het perspectief van het realistisch rekenonderwijs wordt het onderwerp verder geïntroduceerd vanuit een betekenisvolle context die de leerlingen vervolgens helpt om oplossingsstrategieën te ontwikkelen. Als betekenisvolle context is een batterij met een power check zeer geschikt. Op deze batterij wordt bij aanraken een deel van een balkje zichtbaar, waarmee wordt aangegeven voor welk deel de batterij nog geladen is. Deze context sluit dan precies aan bij het strookmodel, dat de gedachte dat een percentage een verhouding is, kan versterken. Vaak wordt dit strookmodel ook in combinatie met het cirkelmodel aangeboden, dat ook bij breuken gebruikt wordt. (Zie ook figuur 1 voor een voorbeeldopgave uit een rekenmethode)



figuur 1 een voorbeeldopgave uit de rekenmethode Pluspunt, waarin het cirkelmodel en strookmodel gebruikt worden



figuur 2 voorbeeldvraagstuk kortingen: Hoeveel moet je betalen voor een trui van €80,- als je 25% korting krijgt?


18% van 750 is ...
147 van 210 is ...%
...% van 3625 is 725

figuur 3 kale rekensommen uit het materiaal voor groep 8

In de eerste plaats worden er eenvoudige percentages gebruikt zoals 5%, 25%, 50%, die te koppelen zijn aan een breuk. In groep 7 wordt er ook begonnen met eenvoudige kortingsvragen, waarbij de kortingen vaak te berekenen zijn met behulp van een eenvoudige breuk (zie figuur 2). In groep 8 wordt het rekenwerk lastiger (zie figuur 3) en worden de strook en verhoudingstabel vooral als rekenhulp ingezet.

Gebruik van verschillende strategieën

Bij procentenopgaven zijn er verschillende strategieën te gebruiken. Vanuit het basisonderwijs komen de leerlingen met die verschillende strategieën de klas binnen. De meest gangbare strategieën zijn:

- gebruik van relatieweetjes, bijv. 25% komt overeen met ¼ deel;
- gebruik van een verhoudingstabel;
- gebruik van handig rekenen, vaak in rijtjes weergegeven;
- gebruik van de 1%-regel.

Op het Wessel Gansfortcollege in Groningen is aan een h/a-brugklas gevraagd om een aantal opgaven over procenten op te lossen. Deze leerlingen waren op de middelbare school nog niet in aanraking geweest met procenten en gebruikten dus alleen hun basisschoolkennis. De verschillende strategieën die hierboven staan, zijn te herkennen in de uitwerkingen van deze leerlingen. In figuur 4 zijn verschillende uitwerkingen van leerlingen te zien bij de volgende opgave: Albo bank – 4,5% rente per jaar. Bart heeft een bedrag van 1000,- op zijn rekening. Hoeveel euro rente levert dat op in een

1% van 1000 = 10
4,5% = (45) 4,5

€1000,- = 100%
50% = 500
5% = 50
1% = 10
½% = 5
4% = 40
4,5% = 45
hij krijgt 45 euro

figuur 4 voorbeeldwerk van uitwerkingen van leerlingen uit een h/a-brugklas

jaar? (Bron opgave: *PPON balans 32*). Hier herken je bij de eerste leerling de 1%-strategie: teruggaan naar 1%, dan keer het percentage dat je wilt weten. De tweede leerling pakt het aan via een lijstje, eigenlijk een soort verhoudingstabel. Bijna alle leerlingen kwamen uit op het goede antwoord.

Een lastiger opgave was de volgende: Tijdens een griepepidemie zit 15% van de kinderen op een school ziek thuis, het gaat dan om 75 zieke leerlingen. Hoeveel leerlingen zitten er in totaal op deze school? In figuur 5 is een aantal uitwerkingen van leerlingen weergegeven. De leerling linksboven gebruikt handig rekenen: 15% = 75, 10% = 50, daarin heeft de leerling vermoedelijk herkend dat 10% 2/3 deel is van 15%. De leerling linksonder gebruikt een verhoudingstabel. De leerling rechts komt via handig rekenen tot een juiste oplossing, al is de uitwerking niet netjes opgeschreven.

'AFSTEMMING OP DE LEERLING IS BIJ REKENONDERWIJS HET TOVERWOORD'

Opvallend is dat de meeste leerlingen gebruikmaken van rijtjes, in plaats van deze getallen in een verhoudingstabel te plaatsen. Verder zijn de gebruikte strategieën vaak vooral 'handig rekenen' en wordt er niet gekozen voor een efficiënte strategie. Dit is ook de tendens in de methodes die gebruikt worden. Het meer formulematige rekenen (zoals deel/geheel × 100%) dat veel op de middelbare scholen wordt aangeboden, is nog niet bekend. Ook wordt er nauwelijks gewerkt met factoren.

Doorlopende leerlijnen

Om op de middelbare school aan te sluiten bij wat de leerlingen al begrijpen en beheersen vanuit het basisonderwijs, is het essentieel om kennis te hebben van de strategieën die de leerlingen gebruiken. De leerlingen moeten ervan overtuigd worden dat ze dezelfde strategieën ook op een andere manier efficiënter kunnen toepassen. Zo hoeft de formule 'deel/geheel × 100%' niet uit de lucht te komen vallen, maar deze kan geïntroduceerd worden via de 1% regel en de verhoudingstabel. Wordt deze stap gemist door de leerling of overgeslagen, dan levert het onbegrepen strategieën op, die leerlingen fout gaan toepassen. Verder wordt de nieuwe informatie op deze manier niet gekoppeld aan wat de leerling al kan, waardoor zij soms halsstarrig vasthouden aan hun begrepen strategie en zo vastlopen als ze bijvoorbeeld vermenigvuldigingsfactoren moeten gebruiken. Het is te adviseren om als school (naast de vaardigheden van docenten) te investeren in het ontwikkelen van leerlijnen in het rekenonderwijs, zodat per subdomein helder is wat

15% = 75 10% = 50 10 × 50 = 500

15%	30%	90%	100%
75	150	450	500

15% 15% 15% 15% 15% 15% } 90% = 450
10% = 50
(4) 500
6 × 75 = 420 + 30 = 450

figuur 5 voorbeeldwerk van uitwerkingen van leerlingen uit een h/a-brugklas



figuur 6 hoofdfasen binnen een leerlijn (Protocol ERWD, Van Groenestijn (2011))

er wanneer van de leerlingen verwacht wordt. De kennis van docenten van deze leerlijnen is essentieel om passend onderwijs te kunnen bieden aan de leerlingen (Pater-Sneep, 2014). Daarbij worden binnen iedere leerlijn de hoofdfasen van de rekenontwikkeling gevolgd, zie figuur 6. In het voortgezet onderwijs ligt bij het vastleggen van leerlijnen een extra kans, omdat rekenvaardigheden niet alleen bij het vak rekenen of wiskunde aan de orde komen, maar ook bij andere vakken, zoals natuurkunde, biologie en aardrijkskunde. Binnen de leerlijn procenten kan zo worden afgesproken wanneer de leerlingen kennismaken met vermenigvuldigingsfactoren. De fasen van de ontwikkeling kunnen gevolgd worden bij wiskunde, waarna het flexibel toepassen binnen andere vakgebieden een vervolg krijgt. Als alle docenten op de hoogte zijn van de stappen in de ontwikkeling, kunnen zij door deze kennis aansluiten bij het niveau van de individuele leerling.

Ten slotte

Het onderhouden en uitbreiden van de rekenvaardigheden van de leerlingen is geen sinecure. Als leraar wordt er van je verwacht dat je kunt omgaan met de enorme niveauverschillen, met rekenproblemen, dat je kennis hebt van rekendidactiek, en dat je een deel van de begeleiding kunt uitvoeren via elo's enzovoort. Afstemming op de leerling is bij rekenonderwijs het toverwoord, zie ook het protocol *Ernstige Rekenwiskunde Problemen en Dyscalculie* dat recent verschenen is voor het voortgezet onderwijs (Van Groenestijn, 2012). Bij de invoering van de rekentoets ligt hier, naast alle discussie over de inhoud en de vormgeving en regelgeving van de toets, een mooie kans om het rekenonderwijs een plek te geven op de school en afstemming te verkrijgen binnen de verschillende vakken die met rekenvaardigheden te maken hebben.

Met dank aan Hanneke van der Heide en haar brugklas van het Wessel Gansfortcollege Groningen voor het maken van de procentenopgaven.

WEBSITE

VAKANTIECURSUS 2013

Afgelopen jaar bezocht Gert de Kleuver als vanouds de vakantiecursus. Onderwerp: wiskunde in wording, over de vermoedens en stellingen die nog steeds tot de verbeelding van velen spreken. Laat u door hem bijpraten over stellingen die een miljoen opleveren als ze opgelost worden. Zie *vakbladeuclides.nl/894vakantiecursus*.

Literatuur

Groenestijn, M. van, Dijken, G. Van, & Janson, D. (2012). *Ernstige RekenWiskunde problemen en Dyscalculie VO*, Assen: Van Gorcum.
Groenestijn, M. van, Borghouts, C., & Janssen, C. (2011). *Protocol Ernstige RekenWiskunde problemen en Dyscalculie,* Assen: Van Gorcum.
Oonk, W., Keijzer, R., Lit, S., Den Engelsen, M., Lek, A., & Van Waveren Hogervorst, C. (2011). *Rekenen-wiskunde in de praktijk – Kerninzichten*, Groningen: Noordhoff Uitgevers.
Pater-Sneep, M. de (2014). De leerlijnen de baas. Noodzakelijke kennis voor goed reken-wiskunde onderwijs. *Volgens Bartjens, 33*(1), 8-11.

Over de auteur

Theresa Kleefsman is sinds 2011 verbonden aan de Pedagogische Academie van de Hanzehogeschool Groningen, als reken- en wiskundedocent. Zij verzorgt daar lessen aan de aankomende leerkrachten. Daarnaast verzorgt ze nascholingen rekendidactiek voor middelbare schooldocenten. Voor 2011 werkte ze als lerares wiskunde in het middelbaar onderwijs. E-mailadres: *k.m.t.kleefsman@pl.hanze.nl*

IMO2013

Jeroen Huijben

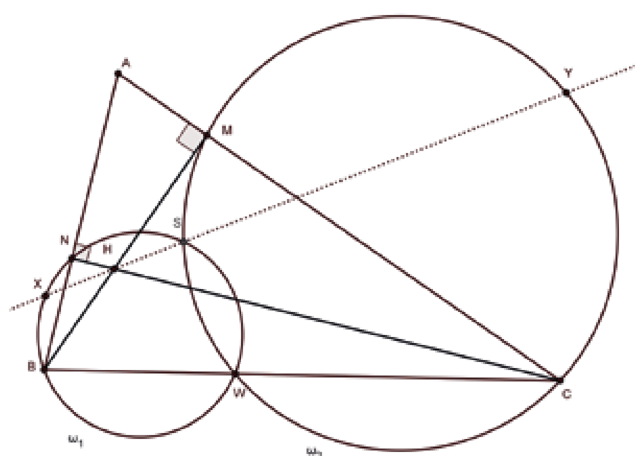
OPGAVE 4

Afgelopen zomer vond van 21 t/m 28 juli de 54e Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaats in Santa Marta, Colombia. In dit artikel bespreekt Jeroen Huijben, die bij deze wedstrijd een zilveren medaille binnensleepte, één van de opgaven. Wellicht biedt dit u inspiratie voor een les voor vwo wiskunde B.



Het Nederlandse team heeft in Colombia een mooie prestatie neergezet: voor het vierde jaar op rij wisten vijf van de zes teamleden een medaille in de wacht te slepen. Dit komt onder andere door het mooie resultaat op de twee moeilijkste opgaven van de wedstrijd: ik loste zelf opgave 3 volledig op en Jeroen Winkel haalde drie van de zeven punten op opgave 6. Maar belangrijker is misschien nog wel dat het hele team opgave 4 volledig heeft opgelost! Dat is de volgende opgave:

Zij ΔABC een scherphoekige driehoek met hoogtepunt H. Zij W een punt verschillend van B en C op het lijnstuk BC. Laat M en N de voetpunten zijn van de hoogtelijnen vanuit respectievelijk B en C. Zij ω_1 de omgeschreven cirkel van ΔBWN en zij X het punt op ω_1 zodanig dat WX een middellijn van ω_1 is. Analoog, zij ω_2 de omgeschreven cirkel van ΔCWM en zij Y het punt op ω_2 zodanig dat WY een middellijn van ω_2 is, zie figuur. Bewijs dat X, Y en H collineair zijn.



In het plaatje van deze opgave vallen mij twee dingen op. Ten eerste weten we nog weinig over de punten X en Y, dus we moeten daar nog extra informatie over vinden. Ten tweede zien we dat het tweede snijpunt van de cirkels ω_1 en ω_2 op dezelfde lijn lijkt te liggen als waar X, Y en H op moeten liggen. Als eerste stap kunnen we dus proberen om te bewijzen dat dit snijpunt op de lijn XY ligt. Daarvoor definiëren we het tweede snijpunt van ω_1 en ω_2 als S. Nu kunnen we iets zeggen over de hoek $\angle WSX$. Er is namelijk gegeven dat WX een middellijn van ω_1 is, dus volgens de stelling van Thales geldt $\angle WSX = 90°$. Analoog, omdat WY een middellijn van ω_2 is, volgt met Thales dat $\angle WSY = 90°$. Dus $\angle XSY = \angle XSW + \angle YSW = 90° + 90° = 180°$ en we vinden dat $\angle XSY$ een gestrekte hoek is. De punten X, S en Y liggen dus inderdaad op een lijn. Als H nu toevallig samenvalt met S, zijn we dus direct al klaar. Maar als H niet samenvalt met S, moeten we nog even langer nadenken.

We hebben wel al iets meer grip op de opgave: ons eerste vermoeden is bewezen en we hebben iets nieuws ontdekt over de punten X en Y. Dat betekent dat we meer mogelijkheden hebben om het gevraagde te gaan bewijzen. Zo kunnen we proberen om te bewijzen dat X, H en S op een lijn liggen. Als dat geldt, liggen namelijk H en Y beide op de lijn XS, dus dan zijn X, Y en H collineair. We kunnen proberen dit te bewijzen door weer te kijken naar de hoeken $\angle WSX$ en $\angle WSH$. Eén van die hoeken weten we al, namelijk $\angle WSX = 90°$. Als we dus kunnen bewijzen dat $\angle WSH = 90°$, dan liggen X, S en H op een lijn. Het is echter nog niet meteen duidelijk hoe we daarbij uitkomen, dus gaan we weer naar het plaatje kijken.

Bij een meetkundeopgave is het vaak belangrijk om koordenvierhoeken te vinden. Als we die bij deze opgave gaan zoeken, springt er één direct in het oog: omdat $\angle AMH = 90°$ en $\angle ANH = 90°$, liggen M en N op de cirkel met middellijn AH (Thales). Dus $AMHN$ is een koordenvierhoek. Als we iets beter kijken, zien we ook dat M en N op de cirkel met middellijn BC liggen, dus ook $BNMC$ is een koordenvierhoek. Als we deze cirkels netjes tekenen, lijkt het of ook S op de omgeschreven cirkel van koordenvierhoek $AMHN$ ligt. Dat kunnen we bewijzen.
Omdat $WCMS$ een koordenvierhoek is, geldt er volgens de koordenvierhoekstelling dat $\angle SMC + \angle SWC = 180°$. En analoog, omdat $WBNS$ een koordenvierhoek is, geldt $\angle SNB + \angle SWB = 180°$. Samen met enkele gestrekte hoeken vinden we dat $\angle SMA = 180° - \angle SMC = \angle SWC = 180° - \angle SWB = \angle SNB = 180° - \angle SNA$. Dat betekent dat $\angle SMA + \angle SNA = 180°$, dus volgens de koorden-

vierhoekstelling geldt dat AMSN een koordenvierhoek is. (Voor de liefhebber, dit was ook een direct gevolg van de stelling van Miguel.) Nu liggen de vijf punten A, M, S, H en N allemaal op één cirkel en AH is een middellijn van die cirkel. Daaruit volgt dat $\angle ASH = 90°$. Dat is al bijna de hoek die we nodig hebben om de opgave op te lossen: daarvoor wilden we namelijk $\angle WSH = 90°$.
Om de oplossing af te maken, gaan we nog laten zien dat A, S en W op een lijn liggen. Voor degenen die de machtslijnenstelling kennen, volgt dit direct door de machtslijnen te bekijken van de omgeschreven cirkels van $WBNS$, $WCMS$ en $BNMC$. Maar ook zonder die stelling is het eenvoudig aan te tonen: volgens de constante-hoekstelling in koordenvierhoek $AMSN$ geldt $\angle ASM = \angle ANM = 180°$ - $\angle BNM$. De koordenvierhoekstelling in $BNMC$ geeft $180°$ - $\angle BNM = \angle BCM = \angle WCM$ en volgens de koordenvierhoekstelling in $WCMS$ is dat weer gelijk aan $180°$ - $\angle WSM$. We vinden dus dat $\angle ASM = 180°$ - $\angle WSM$, dus $\angle ASM + \angle WSM$ is een gestrekte hoek en dus liggen A, S en W op een lijn. Daaruit volgt dat $\angle WSH = 180°$ - $\angle ASH = 90°$ en dat wilden we laten zien.
We hebben het verhaal nu rondgepraat door steeds kleine stapjes te zetten. Het is alleen nog geen 'chronologisch' verhaal. Dat zou ongeveer deze vorm hebben: we merken eerst de koordenvierhoeken $AMHN$ en $BNMC$ op en de rechte hoeken die uit de stelling van Thales volgen, daarna bewijzen we dat $AMSN$ een koordenvierhoek is en daaruit dat A, S, W op één lijn liggen, en als laatste laten we zien dat X, H, S op één lijn liggen en analoog dat Y, H, S op één lijn liggen; daaruit volgt dat X, H, Y op één lijn liggen. Hierin is één van onze eerste waarnemingen, dat S op XY ligt, niet eens meer nodig!
Als je naar deze oplossing kijkt, dan zie je dat er eigenlijk steeds een klein stapje wordt gezet of een klein vermoeden bewezen en dat leidt uiteindelijk tot de oplossing. Afzonderlijk zijn dit allemaal geen moeilijke stappen, maar voor de oplossing moet je er toch maar net op komen. Nu hebben we steeds precies de goede stapjes gezet, maar bij een wedstrijd zoals de IMO is dat meestal niet het geval. De meesten van het Nederlandse team hebben dan ook andere oplossingen bedacht dan die hier gepresenteerd is. Bekijken we bijvoorbeeld de afstanden van de punten X, H, Y tot BC, dan kunnen we de verhoudingen daartussen uitdrukken in lengtes die op lijnstuk BC liggen. Zo is B de loodrechte projectie van X en C die van Y, en daar kunnen we ook nog de loodrechte projectie van H en het snijpunt van XY en BC bij betrekken (als dat bestaat). Met deze heel andere insteek krijg je ook een oplossing. Ik wil nu ook nog een andere oplossing bespreken die gebruikmaakt van een zogenaamde draaivermenigvuldiging.
Voor een draaivermenigvuldiging moeten we een punt O in het vlak (de oorsprong), een hoek $0 \leq \theta \leq 360°$ en een reëel getal $f > 0$ kiezen (factor). Een draaivermenigvuldiging is dan een functie van het vlak naar het vlak, waarbij het beeld van een punt P als volgt wordt bepaald: roteer P om O over een hoek θ, dat geeft P'; en 'vermenigvuldig' P' vervolgens ten opzichte van O met een factor f, dit geeft het beeld P''. Deze vermenigvuldiging is vergelijkbaar met scalaire vermenigvuldiging bij vectoren: $OP'' = f\,OP'$. Met deze definitie kunnen we ook het beeld van een figuur bepalen en dit beeld is gelijkvormig met het origineel, dit is een belangrijke eigenschap. Een andere belangrijke eigenschap is dat de hoek tussen een lijn en het beeld van die lijn gelijk is aan θ.
Nu beginnen we echt met de tweede oplossing: we merken eerst weer de koordenvierhoeken $AMHN$ en $BNMC$ en de rechte hoeken door Thales op. Nu laten we zien dat driehoeken XNW en HNA gelijkvormig zijn. Er geldt dat $\angle XNW = 90° = \angle HNA$, al één gelijke hoek. Ook geldt $\angle NXW = \angle NBW$ (constante-hoekstelling), $\angle NBW = \angle NBC = 180°$- $\angle NMC$ (koordenvierhoekstelling), $180°$ - $\angle NMC = \angle NMA = \angle NHA$ (constante-hoekstelling). Dus $\angle NXW = \angle NHA$, dus driehoek XNW en driehoek HNA hebben twee gelijke hoeken en zijn daarmee gelijkvormig.
Nu bekijken we de draaivermenigvuldiging met oorsprong N, hoek $90°$ en factor $\frac{|NW|}{|NX|}$. Deze functie stuurt X naar W (ga dit na). Vanwege de zojuist aangetoonde gelijkvormigheid geldt $\frac{|NW|}{|NX|}=\frac{|NA|}{|NH|}$, en we zien nu ook dat H naar A gestuurd wordt. De lijn XH wordt dus naar de lijn WA gestuurd en omdat de draaihoek $90°$ is, is de hoek tussen XH en WA ook $90°$. Analoog kunnen we laten zien dat YH en WA een hoek van $90°$ maken. Maar nu zien we dat XH en YH beiden loodrecht op WA staan. XH en YH zijn dus parallel en beide lijnen gaan door het punt H. Dat betekent dat XH en YH samenvallen en dus dat X, H, Y op één lijn liggen. Met een slim trucje wordt de oplossing ineens een stuk korter, maar dat wil niet zeggen dat je de opgave op die manier ook sneller oplost. Het bedenken van zo'n slim trucje vergt tijd, maar het loont vaak wel om ernaar te zoeken. De eerste oplossing vind je door hard werken en steeds kleine stapjes te zetten, maar dat werkt niet altijd. Vaak is een slimme, creatieve stap nodig om de opgave op te lossen en een elegante oplossing te vinden.

Over de auteur

Jeroen Huijben heeft drie jaar meegedaan aan de Internationale Wiskunde Olympiade. In 2011 behaalde hij brons, in 2012 goud (de derde gouden medaille in de historie van Nederland op de IMO) en in 2013 zilver. Hij studeert nu wiskunde en scheikunde aan de Universiteit Utrecht. E-mailadres: *jeroentjehuijben@hotmail.com*

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

BUSJE KOMT ZO, BUSJE KOMT ZO

Een eenvoudige opgave in het schoolboek kan zomaar inspireren tot een uitgebreid onderzoek met de hele klas. Jacques Jansen vertelt in dit artikel over een eigen ervaring hiermee. Een verleidelijke maar incorrecte redenering over kansberekening wordt op de pijnbank gelegd en u wordt uitgedaagd zelf nog verder onderzoek te doen naar dit onderwerp.



In 1995 haalde het zangduo Höllenboer uit het oosten van het land een nummer 1-hit met het liedje *Het busje komt zo*.[1] Vele jaren later had ik een klassengesprek over een opgave over twee busjes met twee telproblemen en één vraag om een kans te berekenen. Het begrip combinatie was al besproken en het combinatiegetal $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n\ \ k)}$ gedefinieerd. Zie figuur 1 voor de opgave en figuur 2 voor de antwoorden uit het uitwerkingenboekje.[2] Mijn leerlingen hadden te kennen gegeven deze opgave te willen bespreken. Vraag a) was een mooie gelegenheid om te laten zien dat $\binom{25}{10}=\binom{25}{15}$. Kies je tien leerlingen uit een klas, dan heb je automatisch een keuze van vijftien leerlingen gedaan voor de andere bus. Ook vraag b) was voor de leerlingen niet echt een probleem. Nee, de angel zat in vraag c). Dat was ook niet zo verwonderlijk: het is een lastige vraag en bovendien was het antwoord in het uitwerkingenboekje fout.

Een klas van vijfentwintig leerlingen moet verdeeld worden over twee busjes. In het ene busje kunnen tien leerlingen in het andere vijftien.

- **a.** Op hoeveel manieren kan dit?
- **b.** Jan en Frans zitten bij elkaar in de klas. Hoeveel verdelingen zijn er waarbij Jan en Frans bij elkaar in de bus van vijftien leerlingen zitten?
- **c.** De leerlingen worden willekeurig verdeeld. Bereken de kans dat Jan en Frans in dezelfde bus komen.

figuur 1

Er liepen twee verslaafden zo maar over straat
De een vroeg aan de ander zeg weet jij misschien hoe laat
hoe laat komt hier de bus (3 keer)
Toen zei de ander dus

(refrein)
Busje komt zo (12 keer)
Eventjes geduld nog
Want het busje komt zo

Bij vraag c) kun je volstaan met het kansbegrip van $\frac{\text{Aantal gunstige mogelijkheden}}{\text{Totaal aantal mogelijkheden}}$. Het totaal aantal mogelijkheden hebben we al berekend in vraag a). Als Jan en Frans plaatsnemen in de bus van tien, dan zijn er $\binom{23}{8}$ mogelijkheden. Nemen zij plaats in de bus van vijftien, dan zijn er $\binom{23}{13}$ verdelingen.

De berekening van de kans

Ik probeer bewust om te gaan met de grafische rekenmachine. Bovendien hebben we onlangs de definitie gehad voor een combinatiegetal. Dus we gaan met de faculteiten rekenen.

$$P(\text{Jan en Frans in dezelfde bus})=\frac{\binom{23}{8}+\binom{23}{13}}{\binom{25}{10}}=\frac{\frac{23!}{8!\cdot 15!}+\frac{23!}{13!\cdot 10!}}{\frac{25!}{10!\cdot 15!}}.$$

6a $\binom{25}{10} = \frac{25!}{10! \cdot 15!} = 3268760$

6b $\binom{23}{13} = \frac{23!}{10! \cdot 13!} = 1144066$

6c $\frac{2 \times 1144066}{3268760} \approx 0{,}6816$ ✗

figuur 2

Dit betekent voor de leerlingen dat zij hun vaardigheden met breukrekenen moeten combineren met rekenen met faculteiten. Voor veel leerlingen is dit een hele klus. Uiteindelijk vinden we in diezelfde les de uitkomst ½. Tja, zo'n mooie uitkomst geeft te denken. Zou er een methode of redenering zijn om de gevraagde kans uit te rekenen die veel eleganter is? We zijn wel bezig met kansrekening en wagen ons misschien op glad ijs.



Andere aanpak met een verkeerde redenering

Toen kwam ik met de volgende redenering: in bus 1 (voor 10 leerlingen) zit Jan en in bus 2 zit Frans, of in bus 1 zit Frans en in bus 2 zit Jan, of in bus 1 zitten Jan en Frans, of in bus 2 zitten Jan en Frans. De kans dat de heren bij elkaar zitten, is dan 2 op 4 oftewel ½. U ziet hopelijk de valkuil waar ik met beide voeten ingetrapt ben: de vier genoemde gebeurtenissen zijn niet allemaal even waarschijnlijk. Laten we dat nog even narekenen.

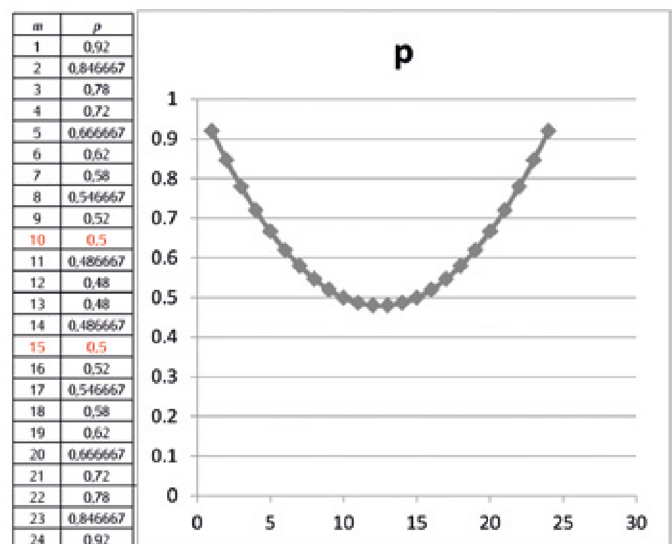
$$P(\text{J. in B1 en F. in B2}) = P(\text{F. in B1 en J. in B2}) = \frac{\binom{23}{9}}{\binom{25}{10}} = 0{,}25;\ P(\text{J. en F. in B1}) = \frac{\binom{23}{8}}{\binom{25}{10}} = \frac{3}{20};$$

$$P(\text{J. en F. in B2}) = \frac{\binom{23}{13}}{\binom{25}{10}} = \frac{7}{20}$$

Deze redenering klopt dus niet. Zou het mooie antwoord ½ gewoon toeval zijn? Om dat te achterhalen, kun je een geval met andere getallen bekijken en nagaan of je weer op hetzelfde mooie antwoord uitkomt. Bijvoorbeeld de situatie met in bus 1 twee leerlingen en in bus 2 drie leerlingen. In totaal zijn er dan tien verdelingen. Zie onderstaande tabel.

Bus 1 (2)	Bus 2(3)	Aantal verdelingen
J en F		1
	J en F	3
J	F	3
F	J	3

De kans dat de beide heren in dezelfde bus zitten is dan 4 op 10, dus niet gelijk aan ½.



m	p
1	0,92
2	0,846667
3	0,78
4	0,72
5	0,666667
6	0,62
7	0,58
8	0,546667
9	0,52
10	0,5
11	0,486667
12	0,48
13	0,48
14	0,486667
15	0,5
16	0,52
17	0,546667
18	0,58
19	0,62
20	0,666667
21	0,72
22	0,78
23	0,846667
24	0,92

figuur 3

Vader aan de slag

Diezelfde dag kreeg leerling Inge hulp van haar vader. Pa is socioloog en managementdeskundige en heeft het nodige gehad aan statistiek. Pa is het niet eens met de uitkomst in het antwoordenboekje en dat is terecht. Hij heeft voor zijn dochter ook twee methoden in gedachten: de ene rechtstreeks, zoals ik dat voor het bord deed; de

andere met behulp van de complementregel:

$$P(\text{J. en F. in dezelfde bus}) = 1 - P(\text{J. en F. niet in dezelfde bus}) = 1 - \frac{2\cdot\binom{24}{9}}{\binom{25}{10}} = \frac{1}{2}.$$

De vader van Inge wijst mij, via een kladblaadje, op mijn foute redenering bij de tweede aanpak, en hij laat weten dat de uitkomst ½ intuïtief voor hem niet bevredigend is. In de klas kom ik de volgende les terug op mijn foute redenering en ik stuur een e-mail naar de vader om hem te bedanken. Dan ontstaat er een levendige correspondentie tussen mij en de vader.

Een citaat uit een e-mail

Geachte heer Jansen,
Leuk dat u zo reageert. Toch vind ik mijn uitkomst intuïtief niet bevredigend. Ik heb namelijk het gevoel, een slecht argument in de wiskunde, dat de kans groter wordt dat ze samen in één bus terechtkomen als het verschil tussen de omvang van de bussen groter wordt. We zouden dus het algemene geval moeten uitwerken van totaal ($m + n$) leerlingen die in een bus van m en in een bus van n moeten instappen.

Met Excel of GR in de klas aan het werk

Het idee van de vader werken we in de klas verder uit met behulp van Excel. Ik zorg voor een deels ingevuld werkblad en de leerlingen vullen de p-kolom verder in. Hierbij is p de kans dat Jan en Frans in dezelfde bus komen en m het aantal leerlingen in bus 1, waarbij we het totaal aantal leerlingen gelijk houden aan 25. Snel valt de symmetrie in de tabel op en ontstaat vanzelf het idee om de bijbehorende grafiek te bekijken, zie figuur 3.
Nu wordt het duidelijk hoe het met het vermoeden van de vader van Inge zit. Hoe groter het verschil is tussen de bemensing van de twee busjes, hoe groter de kans dat beide heren in dezelfde bus zitten.

Formule opstellen

De 24 punten lijken wel op een parabool te liggen en als dat zo is, wil je graag weten welk kwadratisch verband hierbij hoort. Het opstellen van een formule kan ook weer op verschillende manieren. Via de kansberekening bijvoorbeeld: dat hebben we al gedaan voor tien leerlingen in bus 1, maar nu gaan we dat doen voor m leerlingen in bus 1.

$$P(\text{J.en F. in dezelfde bus}) = \frac{\binom{23}{m-2} + \binom{23}{(25-m)-2}}{\binom{25}{m}} = \frac{\frac{m!}{(m-2)!} + \frac{(25-m)!}{(23-m)!}}{600} =$$

$$\frac{1}{600}(m(m-1) + (25-m)(24-m)) = \frac{1}{600}(2m^2 - 50m + 600)$$

De conclusie is dus dat er een kwadratisch verband is tussen kans en het aantal leerlingen in bus 1.

Nog meer onderzoeksvragen

Het e-mailverkeer leverde nog de volgende vragen op:

1. bewijs zonder formules dat de kansgrafiek symmetrisch is;
2. is het mogelijk dat de kans dat beide jongens in dezelfde bus zitten precies ½ is als een groep van 24 leerlingen verdeeld is over twee bussen en hoe zit dat met andere even aantallen?;
3. neem twee bussen met gelijke aantallen, dus $m = n$. Druk de kans dat beide jongens in dezelfde bus zitten uit in m;
4. laat zien als beide bussen hetzelfde aantal leerlingen vervoeren, de kans dat beide jongens in dezelfde bus komen nooit ½ kan zijn;
5. bewijs dat in de situatie van vraag 4 de kans altijd kleiner is dan ½.

Tot slot

Het liep niet goed af met de twee verslaafden uit het liedje; ze dachten alleen maar aan de spuit. En bij het oversteken keken zij dus niet goed uit. Ze werden helaas overreden door de methadonbus. Bij kansrekening moet je ook goed opletten. Voordat je het weet, lig je in een valkuil, maar een fout kan wel weer leiden tot veel ideeën en mooie wiskunde. Het zou leuk en leerzaam zijn als u zich ook een uitglijder bij kansrekening kunt herinneren en bereid bent om dat aan ons door te geven. Het lijkt me interessant om deze ervaringen te verzamelen en te presenteren.

Noten en referenties

[1] Zie ook de videoclip op *www.youtube.com/watch?v=vhgfF2YY_zY*.
[2] Moderne Wiskunde: A1 deel 2, 7e editie.

Met dank aan Inge en haar vader.

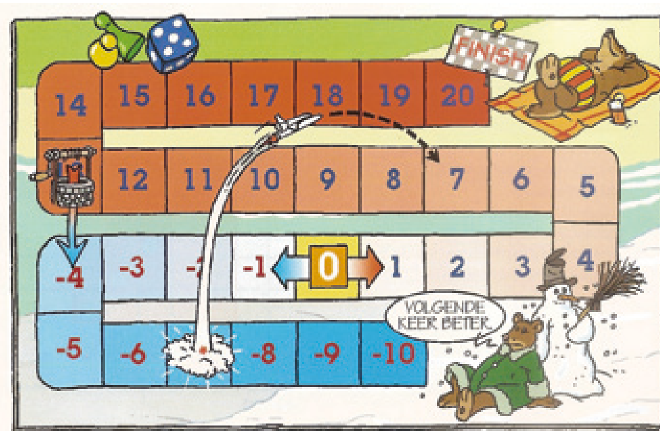
Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar wiskundedocent. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. Hij heeft speciale belangstelling voor de wiskundedidactiek. E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

GANZENBORDEN VOOR GEVORDERDEN

Hans Schipper

In dit artikel laat Hans Schipper zien hoe een klassiek spel door leerlingen in een modern jasje wordt gehesen. En ondertussen leren ze ook rekenen met negatieve getallen.



figuur 1 het Ganzenbord uit *Getal en Ruimte*

Inleiding

In de brugklasboeken van *Getal en Ruimte*[1] staat een spel, dat is geïnspireerd op het aloude Ganzenbord, zie figuur 1. Gaan de vakjes bij het originele spel van 1 tot en met 71, bij het spel in het wiskundeboek kan men vanaf de start in positieve richting van 1 tot en met 20 en in negatieve richting van –1 tot en met –10. Elke speler heeft één pion die bij nul begint. Er gaat geworpen worden met twee dobbelstenen. Om ook in een negatieve richting te kunnen gaan, is er een negatieve en een positieve dobbelsteen bedacht. De spelers gooien om de beurt met beide dobbelstenen. Gooit iemand –5 en +3, dan gaat de pion twee vakjes vooruit. Wie +2 en –6 gooit, verschuift de pion vier vakjes achteruit. Winnaar is degene die het eerst bij 20 komt. Maar komt je op –10, dan ben je af. Er is zelfs een put ingebouwd die voor een dip zorgt: terugplaatsing van 11 naar –4. Dan geeft –7 meer soelaas: een schietstoel brengt de pion naar 7.
'Gaan we dit ook een keer doen, meneer?' vraagt Melle, die altijd alles wil behalve sommen maken. Een meerstemmige herhaling van zijn verzoek uit vele kelen trekt mij over de streep.

Literatuur

De Amsterdamse hoogleraar ontwikkelingspsychologie Bert van Oers[2] benadrukt het belang dat '(...) de verspeelsing van de wiskunde de vorm aanneemt van spelletjes die de kinderen willen spelen omdat ze spannend zijn, omdat er gewonnen kan worden'. Ook in dit geval is een bepaalde wiskundige structuur het uitgangspunt, maar de activiteit is voor de kinderen aantrekkelijk, maakt hen betrokken en zet hen aan tot beheersing van de structuren, omdat daarmee het spel gewonnen kan worden. Kenmerkend voor dit soort spel is vaak dat het herhaling mogelijk maakt en dus uitstekend geschikt is voor automatisering van specifieke operaties. In zulke spelen zit vaak een competitie-element. Het automatiseren van de rekenkundige bewerkingen door middel van het maken van rijtjes opgaven is, denk ik, onontkoombaar, maar als het ter afwisseling op een andere manier kan, grijp ik die mogelijkheid graag aan.
In het boek *Games: Purpose and Potential in Education*[3] worden in de inleiding acht redenen genoemd waarom een spel in het onderwijs goed kan werken:

- een spel is interactief;
- een spel is ongelimiteerd;
- een spel is vrijwillig;
- de speler neemt in een spel een identiteit aan;
- vrschillende mensen houden van verschillende spelen;
- een spel is creatief;
- binnen een spel is er vrije beweging;
- een spel is sociaal.

Vygotski stelt in *Play and its role in the Mental Development of the Child*[4] bovendien dat de regels van een spel in onderling overleg moeten kunnen worden aangepast.
Toen ik aan het zoeken was naar een manier om Ganzenbord te kunnen gebruiken, vroeg ik mij af of ik zelf een op Ganzenbord geënt spel zou ontwerpen. Het gevaar dat bij een dergelijk handelen op de loer ligt, is dat het spel niet goed valt bij de klas. De leerlingen zouden het maar oubollig kunnen vinden om te moeten gaan Ganzenborden. Of het door mij gekozen thema zou ver van de leerlingen af kunnen staan. Waarom dan niet de leerlingen zelf een Ganzenbord laten ontwerpen?
Voordat men hier in de klas toe over gaat, moet men

figuur 2 het speelveld van Noortje en Sarah



proberen zich een voorstelling te maken van het verloop en het resultaat. De mogelijkheid bestaat dat leerlingen in hun ontwerp heel dicht bij het bestaande Ganzenbord blijven, omdat ze zich niet toestaan iets nieuws te bedenken, of omdat het nu eenmaal Ganzenbord heet. Daarnaast wil ik natuurlijk graag dat er sommetjes uit het hoofdstuk worden geoefend. Dat zal wellicht niet gebeuren als ik het niet als randvoorwaarde stel. Om er iets van zichzelf in te kunnen leggen en om geen last te hebben van de beperkende associatie met het bestaande Ganzenbord moet het spel een eigen naam en een eigen thema hebben. Op internet vind ik een site[5] waar tegen een zacht prijsje tienvlaksdobbelstenen in allerlei kleuren te koop zijn. Ik bestel er dertig, zodat de leerlingen er in paren van twee gebruik van kunnen maken bij het spelen van het spel. Na enig gepieker kom ik tot de volgende opdracht:

Ganzenbord met positieve en negatieve getallen

[1] Ontwerp met zijn tweeën een door Ganzenbord geïnspireerd spel, in het midden is de Start;
[2] Teken naar links in een kronkelroute de negatieve getallen, naar rechts de positieve getallen (vanaf –35 tot en met +35);
[3] Bedenk een thema, bijvoorbeeld 'Liefde' of 'Auto's' of, om maar eens wat te noemen, 'Tuinieren voor beginners';
[4] Bij het spel moeten twee gewone dobbelstenen of bijvoorbeeld twee tienvlaksdobbelstenen worden gebruikt;
[5] Bij de start van het spel spreken de spelers af welke dobbelsteen negatief is en welke positief; werpt een speler bijvoorbeeld –5 en +6, dan mag de pion een hokje in positieve richting verschoven worden;
[6] In plaats van 'put' of 'gevangenis' bij het echte Ganzenbord moeten rekenkundige opdrachten ingebouwd worden.
[7] Voorbeelden van rekensommen als een pion op een bepaald vakje is aangekomen:
- Verschuif (–5 keer de laatste worp). Was de laatste worp –3, dan mag er +15 verschoven worden.
- Verschuif (3 keer de laatste worp +12). Was de laatste worp 4, dan mag +24 verschoven worden

De laatste twee regels heb ik er met een bedoeling bij gezet: bij het gebruik van twee dobbelstenen waarbij de uitkomst positief of negatief kan zijn, bestaat het gevaar dat de pion na een flink aantal worpen gemiddeld niet verplaatst blijkt. Het gemiddelde resultaat is op de lange duur immers 0. Daarom moeten er voorzieningen in het spel worden ingebouwd die de pion een slinger geven. Er kunnen ladders en bruggen tussen verschillende punten van de route worden aangebracht, maar dat is natuurlijk het gewone ladderspel. Veel aardiger is het om die slinger te laten plaatsvinden door rekenkundige opdrachten.

Het nut van regels vooraf

Het zijn heel wat regels. Met een zekere schroom kom ik er mee voor de dag. Er zijn in de hoek van de ontwikkelingspsychologen spelpuristen die vinden dat het kind zoveel mogelijk vrij moet zijn in het spel. Het spel gebruiken in lessituaties mag eigenlijk niet, want het spel zou in de eigen wereld van het kind thuishoren.[6] Op zich begrijp ik dat standpunt wel, maar ja, ik wil natuurlijk net iets meer dan alleen maar spelen. Ik wil dat de leerlingen in het Ganzenbordspel wiskunde oefenen (of, beter nog: ontdekken). Wat ik merk als ik het onderwerp introduceer, is dat leerling onmiddellijk beginnen te vragen of bepaalde dingen die ze verzonnen hebben mogen. De leerlingen vragen naar regels. Dat schept veiligheid. Door de regels te geven, sla ik de piketten waarbinnen het spel (ook het ontwerpen is een spel) moet plaatsvinden. Uiteindelijk zitten ze niet in de zandbak op zaterdagmiddag, maar bevinden ze zich in het wiskundelokaal.

Eigen wereld komt terug

In mijn mavo/havo-klas hebben Yael en Irene ook een liefdesspel bedacht. Eén van hun regels is: 'Je hebt die leuke jongen in de gang gezien. Sla een beurt over om naar hem te kunnen staren'.

Thema's en ontwerpen

Alle drie de brugklassen die ik deze opdracht laat doen, gaan met een enorme energie aan de slag. Om het speelbord te ontwerpen, heb ik eerst A4'tjes uitgedeeld. Is er eenmaal een basisontwerp, dan mogen de leerlingen een gekleurd A3-vel komen halen. Aan het eind van de les moeten deze worden dubbelgevouwen, waarna ik de stapel in een enveloppe bewaar.
Het werkrumoer is precies zoals ik het hebben wil: er wordt zachtjes gepraat en het overleg is nooit storend voor mij of voor de leerlingen.
'Meneer, mogen wij 'De Maffia' als thema?' vragen twee stoere jongetjes. Twee meisjes hebben als thema 'Liefde' gekozen. De getallen kronkelen zich in een hartvormige baan over het speelbord, zie figuur 2. Zij delen me desgevraagd mee een liefdesspel te maken. Twee serieuze jongens gaan aan de slag met 'Licht en Duisternis'. De positieve getallen voeren naar Het Licht en de negatieve getallen laten de speler afdalen naar De Duisternis.
De volgende les heb ik de stapel op mijn bureau liggen en in minder dan geen tijd hebben de duo's zich over hun ontwerp ontfermd om er snel mee verder te gaan. Er zijn kleurdozen meegebracht en met een hartverwarmende inzet worden de plannen uitgewerkt. Dit soort opdrachten bevordert de affectie voor het vak. Ik had gehoopt dat één en ander in twee lessen af zou zijn, maar dat valt tegen. Pas in de derde les kan er gespeeld worden.



figuur 3 regels en kaartjes van Jessica en Ana

Enkele spelen kort besproken

Julién en Daniel komen weer met iets anders: ze hebben als thema een computergame. Hier wordt de eigentijdse game, die het bordspel gedeeltelijk heeft verdrongen, gebruikt als thema van een nieuw ontworpen bordspel.
Sandrien en Danique hebben het Groot Vakantiespel. Bij –15 is men plotseling helemaal door de zon verbrand en een aftocht naar –18 moet worden aanvaard. Hier zou ik dus graag een opdracht hebben gehad als 'Ga 5 × je laatste worp plus 20 verder of zoiets. Het op deze wijze gebruiken van de variabele wordt door veel leerlingen maar liever omzeild, bijvoorbeeld door te kiezen voor een variant op het ladderspel.
Mijn drie klassen vergelijkend constateer ik dat er in de mavo/havo-klas zelden met een variabele wordt gewerkt, in de havo/vwo-klas iets meer en in de gymnasiumklas in ongeveer 50% van de gevallen. Als ik dit er in wil hebben, zal ik het voortaan nadrukkelijker moeten noemen bij de regels.
In de gymnasiumklas hebben Jessica en Ana het beoogde leerdoel 'rekenen met een variabele' wel bereikt, maar als je goed kijkt, zie je dat er reden is voor een gesprekje met hen. Wie op een bijzondere plaats komt, moet een kaart uit de stapel trekken. Deze kaarten zijn uiteraard hartvormig, zie figuur 3. Het lijkt er op dat negatief en achteruit is vormgegeven als gebroken hartje. De ... op een kaart is van wiskundige aard: 'Ga je vorige worp plus 7 vooruit' staat op een niet-gebroken hart. Ik vraag me af of wat er gebeurt als de laatste worp –15 is. De uitkomst is dan –15 + 7 = –8. Zal –8 vooruit juist worden geïnterpreteerd? Snappen de leerlingen dat 'vorige worp + 7' toch achteruitgang kan betekenen?
'Doe –19 keer je laatste worp'. Er staat niet bij hoe er dan verschoven moet worden. Dat kan een verschuiving in positieve richting zijn. En wat moet de speler doen als de pion buiten de rand van het speelveld terecht komt? 'Laatste worp × 5 – 3 + 2 en ga zoveel stappen achteruit' staat er op een gebroken hartje. Als de laatste worp –2 is, dan is de uitkomst van de berekening –11. Wordt –11 stappen achteruit opgevat als 11 stappen vooruit?

Als ik volgend jaar weer de opdracht 'Bouw je eigen Ganzenbord' doe, besteed ik aandacht aan een aantal zaken. Als er niet genoeg dobbelstenen zijn, kan er ook twee maal met één dobbelsteen worden geworpen. De eerste worp is negatief, de tweede worp is positief. Het spel nodigt uit tot reflecteren na de introductie van de bewerkingen +, – en × op positieve en negatieve getallen. Leerlingen mogen spelregels veranderen. Dat is interessant: door een spelregel te veranderen, verandert ook het spel. Het maken van het spel neemt 2 à 3 lessen in beslag

Spel als werkvorm

Dit artikel geeft een beschrijving van het ontstaan en het ontwikkelen van het idee om met de klas een eigen Ganzenbord te gaan bouwen, alsmede van het lesverloop en de resultaten daarna. In de Ganzenborden worden wiskundige begrippen zoals negatief getal en variabele gekoppeld aan iets dat leerlingen leuk vinden: Spel.
Eén van mijn doelen was het scheppen van een positieve beleving van het vak wiskunde. Gelet op het plezier waarmee de leerlingen werkten, kan ik stellen dat dit doel ruimschoots is bereikt. De opbrengst, per klas een veertiental kleurrijke en humoristische Ganzenborden, toont dat nog eens aan. Spel als werkvorm is een waardevolle aanvulling op de bestaande wiskundedidactiek.

Noten

[1] Reichard, e.a. (2003, 2007). *Getal en Ruimte, deel 1 vwo en 1 havo/vwo* §3.2 'Positieve getallen optellen en aftrekken', Houten: EPN
[2] Van Oers, B. *Spel en de ontwikkeling van het mathematiseren* (gedownload van *http://home.planet.nl/~oers0054/TEKST spel & mathematiseren.pdf*, op 2 mei 2009; op 21 augustus 2013 helaas niet meer op het Internet te vinden)
[3] Miller, Ch. (Ed.) (2009). *Games: Purpose and Potential in Education*. New York: Springer-Verlag
[4] Vygotski, L. (1933). *Play and its role in the Mental Development of the Child* (te downloaden op *www.marxists.org/archive/vygotsky/works/1933/play.htm*, geraadpleegd op 21 augustus 2013)
[5] *www.summoner.nl*, geraadpleegd op 21 augustus 2014
[6] Van der Teems, I. (1997) *Spel en spelen - Plaats, functie en visies*, o.a. blz. 152. Baarn: H. Nelissen.

Over de auteur

Hans Schipper is leraar wiskunde aan het Baudartius College te Zutphen. Hij verkende als Leraar in Onderzoek (LIOn) de mogelijkheden van het Spelelement in de Wiskundeles. Over dit onderwerp verschenen eerder twee artikelen van hem in *Euclides*. E-mailadres: *h.schipper@baudartius.nl*

EXACT BETER VERDELEN

Dieuwertje den Ouden – van Geest

EEN TAAK VOOR DE DOCENT!?

Toen Dieuwertje den Ouden voor het eerst in 3 havo wiskunde les gaf, viel haar het volgende op: een meisje met een 7,5 voor wiskunde twijfelt erg en kiest toch maar wiskunde A. Een jongen met een 5,5 gaat gewoon voor wiskunde B. Als jonge vrouwelijke wiskundedocent verbaasde haar dit. Waarom kiezen meisjes en jongens zo verschillend?

Onbenut potentieel – Ik ben me gaan verdiepen in meisjes en wiskunde, mede door mijn studie Onderwijskunde aan de Universiteit Utrecht. Het is vreemd dat meisjes zo weinig kiezen voor een exact profiel of een bètastudie. Jongens en meisjes zijn namelijk even goed in rekenen en wiskunde[1], en ook in aanleg zit er nagenoeg geen verschil.[2] Meisjes zouden dus net zo vaak een exact profiel kunnen kiezen als de jongens. Het zou zonde zijn om dit onbenutte potentieel te laten liggen.

Keuze – Maar hoe kunnen meisjes gestimuleerd worden om te kiezen voor bèta/techniek? Er is een aantal factoren dat invloed heeft op het kiezen voor een exact profiel; zelfvertrouwen, interesse en het beeld[3] dat leerlingen hebben van bèta/techniek. Dit zelfvertrouwen bij wiskunde is het grote mechanisme achter het verschil waarom meisjes minder kiezen voor een natuurprofiel dan jongens.[4] Als leerlingen weinig zelfvertrouwen hebben in wiskunde, kiezen ze niet voor een exact profiel. Voor wiskundedocenten is dus een belangrijke taak weggelegd: het positief bijstellen van het zelfvertrouwen en de beeldvorming over bèta/techniek van de leerling.

Zelfvertrouwen - Dat meisje met die 7,5 voor wiskunde is onzeker. 'Kan ik het wel? Ben ik goed genoeg?' Vooral meisjes zijn hier gevoelig voor. Nederlandse meisjes hebben een extreem laag zelfbeeld in vergelijking met meisjes in andere landen. Ze presteren in groep 6 even goed als jongens bij rekenen, maar denken dat jongens er beter in zijn. Dit neemt tijdens de rest van hun schoolcarrière alleen maar toe. Bij een verschilscore van 0,0 is er geen verschil in het zelfbeeld (wie er beter is) bij rekenen of wiskunde. Het zelfbeeld van Nederlandse meisjes (0,55) is veel slechter dan in België (0,34) of de Verenigde Staten (0,28).[1] Meisjes schrijven een goed resultaat vaker toe aan externe factoren, bijvoorbeeld: 'Het was toeval dat ik een goed cijfer had' of 'Het was een makkelijke toets'. De jongens schrijven een goed resultaat vaker toe aan hun eigen inzicht.[4] Ook nemen meisjes eerder de eventuele angst voor rekenen van hun juf op de basisschool over dan dat jongens dat doen.[5]
Hoe komt het dat Nederlandse meisjes zoveel minder vertrouwen in hun eigen kunnen hebben dan jongens? In Nederland associëren wij bèta/techniek het sterkst met mannelijk en alfa het sterkst met vrouwelijk. Dit onbewuste seksestereotiepe denken is bij Nederlanders heel sterk. In een onderzoek bij 34 voornamelijk westerse landen over de seksestereotiepe associatie staat Nederland na Tunesië onderaan.[6] De Nederlandse samenleving is doorspekt met voorbeelden, rolmodellen en verwachtingen die uitdragen dat bèta/techniek iets voor jongens is. Geen wonder dat docenten hier ook in meegaan. De verwachting is dat jongens met een 6 er wel komen en dat meisjes met een 7 er hard voor moeten werken. Door deze verwachtingen, worden leerlingen verschillend behandeld zodat deze verwachting ook uitkomt, een *selffulfilling prophecy*. Meisjes wordt dan afgeraden om een natuurprofiel te kiezen.

VHTO organiseert kosteloos op scholen door heel Nederland voorlichting in de vorm van 'speeddates'. In groepjes 'speeddaten' de meisjes met vrouwelijke professionals uit bèta/techniek en ICT. Zo maken zij kennis met de mogelijkheden van opleidingen en beroepen in deze sectoren.

Positieve feedback - De eerste stap om dit stereotiepe denken te doorbreken is: wees je als docent bewust van je eigen gedrag. Niet alleen in de derde klas, maar in alle jaarlagen. Niet je hele les hoeft aangepast te worden, maar houd rekening met je eigen gedrag en welk effect dit kan hebben op een leerling. Vraag eens aan vrienden of zij goed waren in wiskunde. Er komt vast een verhaal dat zij vroeger te horen hebben gekregen dat zij niet zo goed waren in wiskunde. Als je dat twee keer gezegd wordt, laat je het wel uit je hoofd om er nog wat aan te gaan doen. Er zijn immers zoveel leukere dingen om te doen voor een puber dan zijn hoofd breken op een mooie wiskundige uitdaging! Positieve feedback heeft invloed op het zelfvertrouwen.[3] Benadruk daarom bij de leerlingen wat er goed gaat. Maak duidelijk dat dat mooie resultaat komt door de inspanningen van hem- of haarzelf. Geef alle leerlingen met een achterstand dezelfde aandacht. Hamer bij iedereen op het maken van huiswerk. Maak duidelijk dat een fout maken menselijk is en mag. Maak dat bespreekbaar in de klas. Sta niet toe dat leerlingen denigrerend zijn over elkaars prestaties. Ga met hen in discussie over het rollenpatroon van man en vrouw. Laat

Girlsday op donderdag 24 april 2014. Scholen kunnen zich aanmelden via *www.girlsday.nl*. Meld je aan voor de nieuwsbrief van VHTO of organiseer speeddates met rolmodellen, een gendertraining voor docenten of mentoren, of schrijf je in voor een conferentie. Meer informatie op *www.vhto.nl*. Kijk voor meer beroepsbeoefenaars op *www.ditdoeik.nl*

zien dat meisjes net zo goed zijn als jongens. De beste vijf leerlingen, zijn dat jongens of meisjes? Zeg het eens hardop. Spreek uit dat je van iedereen verwacht dat ze een goede prestatie neerzetten, en handel er naar. Vergelijk de prestaties van de leerlingen met zichzelf en niet met de rest van de klas. Van een 6 naar een 7, dat is een goede prestatie. Geef dit compliment!

Beeldvorming – Door met voorbeelden in de les aan te sluiten bij de belevingswereld van meisjes, wordt hun interesse gewekt en het beeld van de mogelijkheden van bèta/techniek verbeterd. Zo wordt ook het eerder genoemde seksestereotiepe beeld doorbroken. Voor meisjes zijn vrouwelijke rolmodellen belangrijk, maar die hebben zij nauwelijks. Jongens daarentegen hebben al genoeg rolmodellen om zich heen.[5] Meisjes willen graag het maatschappelijke nut[7] ergens van weten. Hieronder volgen wat voorbeelden. Alle diagnostiek binnen de psychologie is gebaseerd op statistiek. Je krijgt een diagnose als uit een test (vaak een vragenlijst) blijkt dat je afwijkt van het gemiddelde. Een IQ-test wordt steeds geijkt, zodat het gemiddelde IQ van de bevolking 100 is. Scoort iemand een standaarddeviatie lager (onder 75) dan krijgt deze persoon de diagnose zwakbegaafd.
Exponentiële groei kom je ook tegen in de zorg. Wanneer moet een patiënt een volgende pil nemen, rekening houdend met de halve waarde van het medicijn in het bloed? Met levensechte voorbeelden wordt meteen duidelijk hoe je wiskunde kunt toepassen. Maar pas wel op dat de arts niet altijd een man is en de patiënt een vrouw.[8]
Via de methodische beeldenbank *www.ditdoeik.nl* van VHTO kun je leerlingen kennis laten maken met beroepsbeoefenaars die werken in bèta, techniek of ICT. Op deze site staan filmpjes, foto's en verhalen van mannen en vrouwen. Leuk als afwisseling tijdens een blokuur, als hulp bij profiel- of studiekeuze of als introductie voor een nieuw hoofdstuk. Allerlei beroepen zijn in 'Dit Doe Ik' opgenomen: Els is spelontwerper en moet kunnen tekenen in perspectief. Rekenen moet je kunnen bij heel veel beroepen, zoals Fatos die projectleider is voor een woningcorporatie. Stephanie maakt kaarten van Wageningen, handig voor een lesje meetkunde!

VHTO - Gelukkig is er al veel werk verricht op dit terrein door VHTO, het landelijk expertisebureau meisjes/vrouwen en bèta/techniek. Deze stichting zet zich al lange tijd in om meer meisjes en vrouwen te laten participeren aan studies en beroepen in bèta(wetenschap), techniek en ICT. VHTO organiseert diverse activiteiten in de hele onderwijsketen tot en met de arbeidsmarkt, met als doel meisjes op een positieve manier in aanraking te laten komen met bèta, techniek en ICT. VHTO doet aan kennisontwikkeling (*www.genderandstem.com*) en verzorgt op basis hiervan trainingen voor docenten. Ook voert VHTO, naast voorlichting en gastlessen voor meisjes, in zowel het basis- als het voortgezet onderwijs, beleids- en adviesgesprekken met directies van onderwijsinstellingen en werkt samen met bèta/technische bedrijven. Een voorbeeld hiervan is de landelijke Girlsday. Dit is een dag waarbij meisjes een bezoek brengen aan een bèta/technisch bedrijf. Ze krijgen zo de kans om zich goed en breed te oriënteren op hun toekomstmogelijkheden. Ze kunnen met eigen ogen zien hoe divers en boeiend bèta en techniek zijn!
Tot slot – Sta morgen eens bewust stil bij hoe je meisjes benadert in de les. Het gaat er niet om zoveel mogelijk meisjes over te halen de keuze te maken voor bèta/techniek. Waar het wel om gaat, is meisjes die interesse hebben voor exacte vakken en die vakken leuk vinden, te stimuleren daar ook iets mee te doen!

Noten:

[1] TIMSS (2011). *International Student achievement in Mathematics*

[2] Fine, C. (2011). *Delusions of gender – The real science behind sex differences*. London: Faber & Faber.

[3] De Weerd, J., & Rommes, E. (2011). To beta or not to beta? Over de rol van docenten in de keuze voor het N&T profiel. *Tijdschrift voor genderstudies*, *4*, 51-61.

[4] Yazilitias, D., Svensson, J., De Vries, G., & Saharso, S. (2013). Gendered study choice: a literature review. A review of theory and research into the unequal representation of male and female students in mathematics, science, and technology. *Educational Research and Evaluation, 19*(6), 525-545.

[5] Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramiraz, G., & Levine, S. C. (2010). Female teachers' math affects girls' math achievement. *Psychological and cognitive science, 107*(5), 1860-1863.

[6] Nosek, B. A., et al. (2009). National differences in gender-science stereotypes predict national sex differences in science and math achievement. *Proceedings of the National Academy of Science*, *106*(26), 10593-10597.

[7] VHTO (2011). *Trendanalyse, Gender in het beta technisch hoger onderwijs*. Houten: ZuidamUithof.

[8] Uit: Youtube-filmpje VHTO 'Hoe los je een wiskundige kwestie op?' *http://youtu.be/cNSBL2J8x70*

Over de auteur

Dieuwertje den Ouden – van Geest is tweedegraads wiskundedocent, werkzaam op Montessori Lyceum Rotterdam, student onderwijskunde aan de Universiteit Utrecht en stagiaire bij het VHTO. E-mailadres: *denouden@vhto.nl*

DE OUDE DOOS REVISITED

André van den Berg
Agnes Verweij

In zijn rubriek 'Vanuit de oude doos' bespreekt Ton Lecluse opgaven die afkomstig zijn van toelatingsexamens voor universiteiten uit het begin van de vorige eeuw. Regelmatig vraagt hij de lezer om mee te denken. Agnes Verweij en André van den Berg reageerden op zo'n oproep.



De volgende opgave, uit 1930, troffen we aan in het nummer van juni 2013: Van driehoek *ABC* is de straal van de ingeschreven cirkel gelijk aan $\frac{1}{6}b$ en hoek $B = 60°$. Bepaal hoek *A* en *C*. Bepaal daarna het oppervlak van de driehoek als $b = 6$ cm. Ton Lecluse bespreekt een aanpak met trigonometrie en een aanpak met standaardformules. Hij zegt benieuwd te zijn of de lezer:

— vergelijking (1)... $6\sin\alpha = \sqrt{3}(-6\cos\alpha + \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{3})$ die ontstaat bij de trigonometrische aanpak en die hijzelf met een grafische rekenmachine te lijf gaat, exact op kan lossen;

— de oppervlakte van de driehoek, net zoals hij in aansluiting op zijn aanpak met standaardformules heeft gedaan, exact kan berekenen;

— een alternatieve oplossingsmethode voor de opgave, liefst met minder formulegebruik, kan bedenken.

Wij nemen de handschoen op.

De opgave is symmetrisch in *A* en *C*, in die zin dat, als we een oplossing hebben voor α en γ, er nog een oplossing is, die je vindt door de gevonden waarden voor α en γ te verwisselen. Hetzelfde geldt dan natuurlijk ook voor *a* en *c*. We kunnen ons daarom in het vervolg zonder bezwaar beperken tot de oplossingen waarvoor geldt $\gamma \leq \alpha$ (γ is dan een scherpe hoek) en dus $c \leq a$.

Verder doen we aan de algemeenheid geen afbreuk als we ook bij het berekenen van de hoeken gelijk maar $b = 6$ en dus $r = 1$ nemen.

Vergelijking (1) exact oplossen

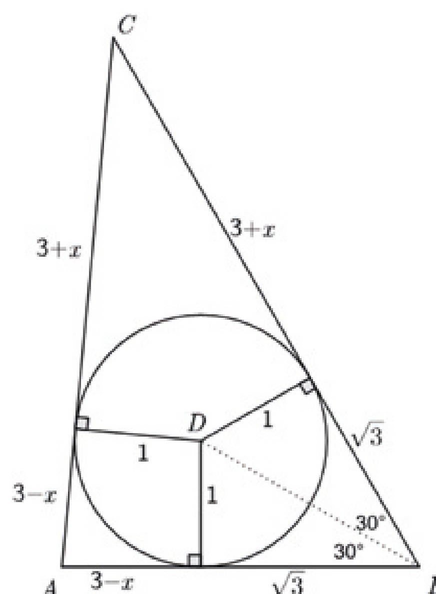
Voor de totstandkoming van vergelijking (1) verwijzen we naar het artikel van Ton Lecluse in het juninummer. We zoeken een oplossing die, gezien de manier waarop de vergelijking gevonden is, voldoet aan $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Nu geldt voor iedere $\theta \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$ dat

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{1-\cos2\theta}{\sin2\theta}$$

zodat vergelijking (1), voor iedere $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$ overgaat in $6\sin\alpha = \sqrt{3}(-6\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \sqrt{3})$ en vervolgens, door links en rechts te vermenigvuldigen met $\sin\alpha$ (waardoor de oplossingen $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$ worden geïntroduceerd, buiten het zoekgebied dus), in

$$6\sin^2\alpha = -6\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}\ \sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} + 3\sin\alpha$$. Via $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha} = 1+\cos\alpha$ vereenvoudigen we tot vergelijking:

(2)... $2\sqrt{3}\sin^2\alpha + 6\cos\alpha\sin\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha = 1$



Als we naar het gegeven meetkundige probleem kijken, zien we dat we uit symmetrie-overwegingen kunnen besluiten dat met α ook $\frac{2\pi}{3} - \alpha$ een oplossing is. Daarom substitueren we $\frac{\pi}{3} + \varphi$ voor α en weten dan dat $\frac{\pi}{3} + \varphi$ en $\frac{\pi}{3} - \varphi$ beide wel of beide geen oplossingen zijn en dat $\varphi = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$ ingevoerde oplossingen zijn die buiten het zoekgebied liggen. Dat doet hopen op een vergelijking waarin uitsluitend $\cos\varphi$, als even functie van φ, als onbekende voorkomt.

Vergelijking (2) gaat door de substitutie over in

$$2\sqrt{3}\sin^2(\frac{\pi}{3}+\varphi)+6\cos(\frac{\pi}{3}+\varphi)\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)-\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)-\cos(\frac{\pi}{3}+\varphi)=1$$

waarbij we zoeken naar een oplossing die voldoet aan $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{2\pi}{3}$.

Vervolgens de gonio-somformules gebruiken, haakjes wegwerken, $\sin^2\varphi$ vervangen door $1-\cos^2\varphi$ en vereenvoudigen tot vergelijking:

(3)... $12\cos^2\varphi-2\sqrt{3}\cos\varphi-3-\sqrt{3}=0$.

Zoals we hadden gehoopt, ontbreken nu termen met $\sin\varphi$ in de vergelijking. We weten dat voor de ingevoerde oplossingen geldt dat $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$, dus een ontbinding van het linkerlid van vergelijking (3) is snel gevonden: $(2\cos\varphi+1)(6\cos\varphi-3-\sqrt{3})=0$.

Alleen $\cos\varphi=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ is interessant. Omdat $-\frac{1}{2}<\frac{3+\sqrt{3}}{6}<\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ vinden we inderdaad

een (en dan ook precies één) waarde van φ

tussen $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{2\pi}{3}$, namelijk $\varphi=\arccos\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ zodat

$\alpha=\frac{\pi}{3}+\arccos\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ de gevraagde (exacte) oplossing is voor α.

Uiteraard hebben we nu ook γ gevonden:

$\gamma=\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{3+\sqrt{3}}{6}$. In decimale benadering en in

graden: $\alpha\approx 97{,}938127°$ respectievelijk $\gamma\approx 22{,}061873°$.

Voor de fijnproevers: in 1930 werd hiervoor (minder nauwkeurig) ongetwijfeld geschreven: $\alpha\approx 97°56'17''$ respectievelijk $\gamma\approx 22°3'43''$.

Nu nog de oppervlakte

We kennen de formule oppervlakte driehoek $ABC=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ maar die kunnen we niet onmiddellijk toepassen (zonder eerst c te berekenen) omdat we nu weliswaar alle hoeken van de driehoek kennen (immers $\beta=\frac{\pi}{3}$, α en γ hebben we zojuist gevonden), maar slechts één zijde ($b=6$). Met behulp van

de sinusregel $c=\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$ herschrijven we daarom

bovenstaande formule tot
oppervlakte driehoek $ABC=\frac{1}{2}b^2\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}$.

En, omdat, met de gevonden φ van de vorige paragraaf, geldt:

$$\sin\alpha\sin\gamma=\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)\sin(\frac{\pi}{3}-\varphi)=(\sin\frac{\pi}{3}\cos\varphi+\cos\frac{\pi}{3}\sin\varphi)(\sin\frac{\pi}{3}\cos\varphi-\cos\frac{\pi}{3}\sin\varphi)$$

$$=\frac{3}{4}\cos^2\varphi-\frac{1}{4}\sin^2\varphi=\cos^2\varphi-\frac{1}{4}=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{1+2\sqrt{3}}{12}$$

vinden we:

Oppervlakte driehoek $ABC=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\frac{1+2\sqrt{3}}{12\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}}=6+\sqrt{3}$

De student uit 1930

Bovenstaande deed bij ons de vraag rijzen wat men in 1930 van een aankomende student eigenlijk verwachtte. Vergelijking (1) met een grafische rekenmachine oplossen, dat kon hij/zij niet en om met behulp van de oplossing van deze vergelijking de oppervlakte van de driehoek te kunnen 'bepalen', waarmee in die tijd beslist bedoeld werd dat het antwoord exact moest zijn, zou de met zo'n machine gevonden niet exacte waarde van α ook niet voldoende geweest zijn. Zou een aankomende student in 1930 echt de bovenstaande vergelijking (1) hebben moeten kunnen oplossen op de manier die wij hierboven hebben laten zien? Of werd er bij het toelatingsexamen op gerekend dat een aanpak van de opgave gekozen werd die tot een gemakkelijker exact op te lossen vergelijking leidt?

Een voorbeeld van zo'n oplossingsmethode is in elk geval niet de door Ton Lecluse beschreven aanpak met standaardformules. Immers, het exact oplossen van het stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden dat hierbij ontstaat, is niet eenvoudig en misschien nog wel lastiger dan het exact oplossen van vergelijking (1). Bovendien bestaat de oplossing van dit stelsel uit de, niet gevraagde, lengten a en c van zijden van de driehoek en moet nog enige moeite gedaan worden om hieruit de gevraagde hoekgrootten af te leiden.

Dit laatste bezwaar kent ook de aanpak met planimetrie en standaardformules die we hieronder beschrijven, maar het grote voordeel van deze benadering is dat deze zonder veel formulemanipulatie leidt tot een gemakkelijk op te lossen vergelijking, namelijk een simpele tweedegraadsvergelijking.

De berekening van de oppervlakte van de driehoek verloopt hierbij, gezien de hint die Ton Lecluse daarvoor gaf, op vrijwel dezelfde manier als die hij gebruikt zal hebben bij zijn oplossing met standaardformules.

Overigens, vermoedelijk is er op vraagstukken als het onderhavige in die tijd waarschijnlijk wel meer geoefend, getuige het feit dat de eerste opgave van het Meetkunde-examen van de MULO in 1929 vrijwel hetzelfde probleem betreft. (Zie het NVvW-jubileumboek *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, uitgekomen in 2000, blz. 127, in een artikel van Harm Jan Smid).

Het kan ook anders
Een bekende stelling uit de planimetrie zegt dat de lengtes van de twee raaklijnstukken aan een cirkel vanuit een punt buiten die cirkel gelijk zijn. Omdat $\beta = 60°$ en de straal van de ingeschreven cirkel 1 is, hebben beide raaklijnstukken vanuit B aan de ingeschreven cirkel de lengte $\sqrt{3}$. De raaklijnstukken vanuit A en C zijn (nog) onbekend maar we weten wel dat zijde AC de lengte 6 heeft, zodat we lengten van de betreffende raaklijnstukken gelijk aan $3 - x$ respectievelijk $3 + x$ kunnen stellen. Zie figuur 1.

Vervolgens (met dank aan Hans Vermeer, docent wiskunde aan de TU Delft) passen we, net als Ton Lecluse bij zijn aanpak met standaardregels, de cosinusregel in driehoek ABC toe:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$. Invullen van het een en ander geeft:
$6^2 = (3+x+\sqrt{3})^2 + (3-x+\sqrt{3})^2 - 2(3+x+\sqrt{3})(3-x+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}$
en dit is te vereenvoudigen tot
$x^2 = 8 - 2\sqrt{3}$. We zoeken nu naar een waarde van x die voor α een grotere waarde oplevert dan voor γ, dus naar een x die zijde a groter laat zijn dan zijde c, dus naar een positieve x.
We nemen dus $x = \sqrt{8-2\sqrt{3}}$ zodat we a en c gevonden hebben, en met name: $c = 3 + \sqrt{3} - \sqrt{8-2\sqrt{3}}$.

Om γ te vinden passen we de tweede standaardregel toe, de sinusregel:
$\sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b}$ zodat $\sin\gamma = \frac{(3+\sqrt{3}-\sqrt{8-2\sqrt{3}})\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{6}$ dus
$\sin\gamma = \frac{3\sqrt{3}+3-\sqrt{24-6\sqrt{3}}}{12}$. Hiermee ligt de gezochte scherpe hoek γ vast:
$\gamma = \arcsin\frac{3\sqrt{3}+3-\sqrt{24-6\sqrt{3}}}{12}$ en dus
$a = \frac{2\pi}{3} - \arcsin\frac{3\sqrt{3}+3-\sqrt{24-6\sqrt{3}}}{12}$. Daarom, in decimale benadering en in graden: $\alpha \approx 97{,}938127°$ respectievelijk $\gamma \approx 22{,}061873°$ en dit is in overeenstemming met wat we eerder vonden.

Of de oppervlakte eerst
Merk op dat bij deze aanpak ook iemand die niet zo ver komt om α en γ of zelfs maar a en c te berekenen, de oppervlakte van de driehoek in de schoot geworpen krijgt. En vervolgens kunnen dan, tegen de suggestie in die de oorspronkelijke opgave doet, de waarden van c en daarna die van α en γ bepaald worden. Immers, de planimetrie in het begin van de vorige paragraaf maakt duidelijk (zie figuur 1) dat omtrek driehoek ABC = $2(3+x)+2(3-x)+2\sqrt{3} = 12+2\sqrt{3}$ en, zoals Ton Lecluse al aangaf:
opp. driehoek ABC = opp. ABD + opp. BCD + opp. CAD = $\frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ = ½·omtrek driehoek ABC wat een aankomende student in 1930 waarschijnlijk rechtstreeks afgeleid zou hebben uit de destijds bekende standaardformule uit de planimetrie $r = \frac{O}{s}$ waarin r de straal van de ingeschreven cirkel van een driehoek is (in dit geval gelijk aan 1), O de oppervlakte van die driehoek en s de halve omtrek van de driehoek.
Dus opp. driehoek ABC = $\frac{1}{2}(12+2\sqrt{3}) = 6+\sqrt{3}$. Nu nog de waarden van c en daarna die van α en γ bepalen. Daartoe maken we gebruik van de standaardformule oppervlakte driehoek $ABC = \frac{1}{2}ac\sin\beta$. Invullen geeft
$6+\sqrt{3} = \frac{1}{2}(3+x+\sqrt{3})(3-x+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en hieruit volgt
$4(6+\sqrt{3}) = \sqrt{3}((3+\sqrt{3})^2 - x^2)$ zodat $x^2 = 8-2\sqrt{3}$
et cetera (zie vorige paragraaf).

Hoe dit bij het universitaire toelatingsexamen van 1930 gewaardeerd zou zijn, zullen we wel nooit te weten komen.

Antwoorden vergelijken
Natuurlijk, als je een opgave tweemaal correct oplost, zijn de beide antwoorden identiek. Dat hebben we hierboven voor de ons gevonden exacte waarden van γ 'gecontroleerd' met behulp van benaderingen. Maar het is ook aardig om deze controle door exacte berekening uit te voeren. In de eerste paragraaf hebben we een waarde voor γ gevonden die we nu maar even γ_1 noemen, we hebben dus $\gamma_1 = \frac{\pi}{3} - \arccos\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ en later vonden we een tweede oplossing γ_2 die voldoet aan
$\gamma_2 = \arcsin\frac{3\sqrt{3}+3-\sqrt{24-6\sqrt{3}}}{12}$. In lijn met de rubriek van Ton Lecluse suggereren wij als uitdaging voor de lezer: Bewijs dat $\gamma_1 = \gamma_2$.

Over de auteurs
André van den Berg werkte tot voor kort als docent wiskunde aan de Technische Universiteit Delft. Agnes Verweij was als docent wiskunde en didactiek van de wiskunde eveneens werkzaam aan de TU Delft.
E-mailadressen: *a.j.t.vandenberg@skpnet.nl* en *averweij@ipact.nl*

DYNAMISCH MODELLEREN

Arnaud van Harmelen
Thyrza Jagt

HET NUT VAN EEN PRAKTISCHE OPDRACHT

In het voorjaar van 2013 onderzochten Arnaud van Harmelen en Thyrza Jagt of er bij het onderwijzen van een nieuw onderwerp beter begrip ontstaat als dat onderwerp middels een praktische opdracht wordt geïntroduceerd. In dit artikel vertellen ze over hun onderzoek en de resultaten.

Inleiding

In het voortgezet onderwijs bestaan de wiskundelessen voor een groot deel uit het doorwerken van opgaven uit één (of meerdere) boek(en). Door een krap tijdschema ontbreekt voor veel docenten de tijd om leerlingen bezig te laten zijn met toepassingen van de wiskundestof die in het hoofdstuk wordt behandeld. Door zulke toepassingen te verwerken in het lesprogramma kan er, ondanks het extra werk voor de docenten, bij de leerlingen een beter begrip ontstaan van de (nieuw aangeleerde) theorie.
In maart en april 2013 hebben wij, twee studenten van de lerarenopleiding aan de TU Delft, op het lyceum Ypenburg een oriënterend onderzoek uitgevoerd. Wij bekeken het effect van het toevoegen van toepassingen in de vorm van een praktische opdracht op het onderwijzen van een nieuw onderwerp. Het doel was uitvinden of het aanbieden van toepassingen bijdraagt tot een beter begrip van differentiaalvergelijkingen bij leerlingen. We voerden het onderzoek uit met elf wiskunde B-leerlingen uit 5 vwo. Deze leerlingen hebben wij nieuwe leerstof aangeboden aangaande differentiaalvergelijkingen.

Opzet

Wij deelden het onderzoek op in drie delen. Het eerste deel, waarvoor wij één les gebruikten, diende ter introductie van de lessenserie. Hierbij waren alle leerlingen aanwezig. In het tweede deel lieten wij de leerlingen gedurende vijf lessen aan een, door ons zelf ontworpen, praktische opdracht[1] werken. In deze periode waren drie leerlingen afwezig wegens een werkweek. De overige acht leerlingen voerden in tweetallen de praktische opdracht uit. Het laatste deel van het onderzoek besloeg tien lesuren. Wij vulden deze lessen in met theorie uit het boek. Hierbij waren alle elf leerlingen weer aanwezig. De drie leerlingen die op werkweek waren, kregen dus een 'regulier' lesprogramma, dit in tegenstelling tot de overige acht leerlingen. Hierdoor kan het effect van een praktische opdracht op de begripsvorming van het onderwerp worden gemeten.

Introductie differentiaalvergelijkingen

In de eerste les is kort het onderwerp van de lessenserie geïntroduceerd en is gestart met het opstellen van een model. Het model betrof een zwembad dat lekt wegens een gat in de bodem. We lieten de leerlingen eerst een schets maken van hoe het waterniveau zou veranderen in de tijd. Hierdoor moesten zij nadenken over de factoren die een rol spelen in deze situatie. Nadat de leerlingen in tweetallen over dit verloop hadden nagedacht, werden de verschillende ideeën op het bord geschetst en besproken. Hierdoor werd duidelijk wat reële mogelijkheden waren en wat niet. Zo concludeerden zij dat zowel de hoeveelheid water in het zwembad als de grootte van het gat een rol spelen in de hoeveelheid water die uit het zwembad stroomt! Met deze informatie hebben wij samen met de leerlingen de basisvergelijking $\frac{dW}{dt}=-l\cdot W$ opgesteld, waarbij W het waterniveau is in het zwembad en l de constante die betrekking heeft op het gat. De rest van de les gebruikten wij om samen met de leerlingen de oplossing van deze differentiaalvergelijking te vinden. Hierbij is aandacht besteed aan het feit dat de oplossing in dit geval een functie moet zijn en niet slechts een getal.

Praktische Opdracht

Tijdens de praktische opdracht hebben de acht leerlingen onder andere leren werken met het computerprogramma *SCY Dynamics*.[2] Dit programma laat de gebruiker grafisch één of meerdere differentiaalvergelijkingen implementeren. Na implementatie kan de gebruiker mogelijke uitkomsten simuleren door parameters te variëren.
In de eerste les van de praktische opdracht zijn wij verder gegaan met het voorbeeld van het lekkende zwembad. We zijn begonnen met een korte herhaling van het voorbeeld waarna we het model hebben uitgebreid. Als uitbreiding kozen we een instroom van water, dat via een tuinslang het zwembad instroomt. Vervolgens lieten we aan de leerlingen zien hoe dit model kan worden geïmplementeerd in SCY Dynamics. Na de uitleg moesten de leerlingen het model zelf implementeren. Vervolgens ontdekten zij de verschillende functionaliteiten van SCY Dynamics aan de hand van een door ons ontworpen werkblad. Een soortgelijke werkblad hebben wij opgesteld voor elke les van de praktische opdracht.
De volgende les begonnen de leerlingen met het opstellen van basisvergelijkingen die horen bij een ziektemodel. Het

basismodel bestaat uit twee differentiaalvergelijkingen. De ene is voor een groep gezonde mensen en de ander voor een groep zieke mensen. In de derde les dachten de leerlingen na over uitbreidingen van het model om dit realistischer te maken. Hierbij stuurden wij als procesbegeleiders aan op het toevoegen van een groep mensen die resistent was geworden voor de ziekte. Vervolgens bekeken de leerlingen welk effect het toevoegen van resistentie heeft op de basisvergelijkingen.
De laatste twee lessen van de praktische opdracht zijn gebruikt voor een eindopdracht. We introduceerden deze opdracht door middel van een klassikale brainstorm. Het doel van deze brainstorm was het bedenken van extra toevoegingen voor het model. De leerlingen werden vervolgens gevraagd om in tweetallen (minstens) één van deze toevoegingen uit te kiezen. Deze uitbreiding verwerkten zij daarna in de vergelijkingen en in SCY Dynamics. Om de praktische opdracht af te sluiten, leverden zij een verslag van de resultaten van een beperkte parameteranalyse en een beschrijving van het implementatieproces in.

Theorielessen

Het laatste deel van het onderzoek betrof de theorielessen. Alle leerlingen waren hierbij aanwezig. Gedurende tien lessen zijn de eerste drie paragrafen van hoofdstuk 15, Continue Dynamische Modellen, uit *Getal en Ruimte Wiskunde D deel 4* behandeld. In deze paragrafen zijn onder andere de definitie van een dynamisch model, lijnelementenvelden, tekenoverzichten en de methode ‘scheiden van variabelen’ behandeld. In de theorielessen begonnen wij bijna iedere les met een korte uitleg en een eventuele huiswerkbespreking, waarna de leerlingen aan het werk gingen met de sommen uit het boek. De opgaven die de leerlingen niet af hadden, moesten zij afmaken voor de volgende les. Aan het eind van de derde les hebben de leerlingen de mogelijkheid gekregen een bonusopdracht te maken. De lessenserie is afgesloten met een toets over de theorie uit het boek.

Meetinstrumenten

Tijdens het leerproces van de leerlingen spelen allerlei factoren een rol. Om het leerproces te kunnen volgen, zijn er bij de leerlingen meerdere enquêtes afgenomen. Een van de factoren die bij het leerproces een rol spelen, is de band met de docent. Een nog belangrijkere factor is de motivatie van de leerlingen. Om deze invloeden te kunnen meten, hebben wij meerdere meetinstrumenten gebruikt. Zo zijn we begonnen met een enquête waarin de voorkennis van de leerlingen is gepeild. Aan het eind van de PO (en voor het begin van de theorielessen) zijn door ons ook een motivatie-enquête en een enquête aangaande de praktische opdracht afgenomen (hierin is ook de mening over ons gevraagd). Met de eerdergenoemde bonusopdracht gaven wij de leerlingen de mogelijkheid om een heel punt (als bonus) te verdienen voor de toets aan het eind van de lessenserie. Hieruit kon eventueel ook afgeleid worden in hoeverre een leerling gemotiveerd was om huiswerk bij te houden. Als laatste hebben wij zowel na afloop van de praktische opdracht als na afloop van de lessenserie mondelinge evaluaties gehouden met de leerlingen.

Resultaten

Uit de resultaten blijkt dat de leerlingen geen enkele voorkennis hadden wat betreft modelleren en differentiaalvergelijkingen. Ook was er geen relatie te ontdekken tussen het beeld dat de leerlingen van ons hadden en hun toetsresultaten. Daarnaast lieten de leerlingen ons weten dat de PO bij hen zorgde voor meer motivatie. De groep zonder PO daarentegen had geen zin in het onderwerp of had hier geen mening over. Helaas was de link tussen de PO en de theorielessen te onduidelijk voor de PO-leerlingen. De negen leerlingen die de bonusopdracht gedaan hadden, gaven aan dat ze dit gedaan hadden omdat ‘het voor de toets alvast punten scoren is‘.
Uit ons onderzoek is gebleken dat het toevoegen van een praktische opdracht niet op een directe manier zorgde voor beter begrip en inzicht van differentiaalvergelijkingen. Indirect zorgde de praktische opdracht wél voor meer motivatie bij de PO-leerlingen, waardoor ze meer moeite deden tijdens de les. Hierdoor hebben deze leerlingen het beter begrepen en gemiddeld hogere resultaten behaald dan de leerlingen die de praktische opdracht niet deden. De PO-leerlingen gaven aan de PO leuk en interessant te hebben gevonden.
Verder viel op dat de leerlingen zowel het opstellen van differentiaalvergelijkingen als het implementeren in SCY Dynamics snel door hadden. Hierbij gingen zij erg gestructureerd en effectief te werk!
De conclusie die wij aan de hand van ons onderzoek trekken is dat, ondanks dat het toevoegen van een PO geen duidelijk effect heeft op het begrip bij de leerling, het wel de motivatie vergroot. Hierbij dient rekening gehouden te worden met het feit dat de steekproef te klein is voor het generaliseren van de conclusie. Het kan dus geen kwaad om een (beperkte) praktische opdracht toe te voegen aan de introductie van een nieuw onderwerp.

Noten

[1] Zie voor het lesmateriaal: *vakbladeuclides.nl/894harmelen*
[2] Zie *www.scy-net.eu/scydynamics*

Over de auteurs

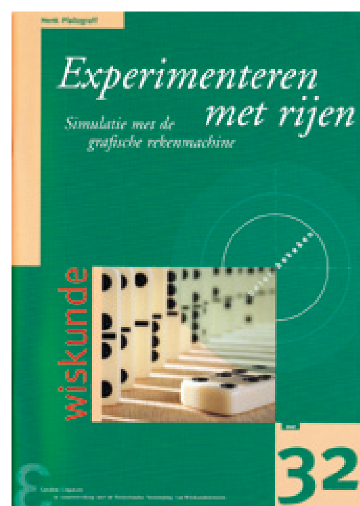
Arnaud van Harmelen en Thyrza Jagt zitten beiden in de masterfase van zowel de opleiding ‘Applied Mathematics‘ als ‘Science Education‘ aan de TU Delft. Beiden schrijven op dit moment mee aan de NLT-module *Spelen met Digitale Techniek*. E-mailadressen: *arnaudvharmelen@gmail.com*; *thyrza_z@hotmail.com*

BOEKBESPREKING

EXPERIMENTEREN MET RIJEN - ZEBRA 32



Jos Remijn



Ondertitel: Simulatie met de grafische rekenmachine
Auteur: Henk Pfaltzgraff
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2010)
ISBN: 978-90-5041-123-3
Prijs: € 10,00 (in de boekhandel),
62 pagina's (paperback)
Voor NVvW-leden geldt op bijeenkomsten een gereduceerde prijs.

Het is alweer enkele jaren geleden dat dit boekje, nummer 32 in de Zebra-reeks, is verschenen. Het boekje richt zich op leerlingen in de bovenbouw van het vwo die gebruikmaken van een grafische rekenmachine (GR) van het type TI83/84 van Texas Instruments. Op de laatste bladzijde staat een korte opsomming van enkele instructies voor de TI-Nspire en op de achterkaft wordt gemeld dat 'leerlingen met enige ervaring met programmeren de in het boekje beschreven programma's makkelijk kunnen vertalen naar (Visual) BASIC'. Dat moge zo zijn, toch lijkt mij dit boekje niet erg toegankelijk voor gebruikers van andere ICT-hulpmiddelen dan de TI83/84.

De auteur

Auteur Henk Pfaltzgraff heeft in wiskundig Nederland bekendheid verworven door kort na invoering van de Tweede fase rond het jaar 2000 op zijn homepage (*http://henkshoekje.com*) een grote hoeveelheid programma's voor de grafische rekenmachines TI83/84 van Texas Instruments te publiceren. Dit ging gepaard met een groot enthousiasme over de invoering van de grafische rekenmachine in de bovenbouw van havo/vwo: 'Je hebt een computer in je rugzakje'.[1] Pfaltzgraff schreef in het begin van deze eeuw ook het zeer lezenswaardig boekje *Programmeren met de TI83*, waarin met inspirerende voorbeelden van programmaatjes die handig zijn bij wiskunde of kansrekening/statistiek, de beginselen van de kunst van het programmeren worden beschreven.
Toen rond 2005 de discussie over de herziening van de Tweede fase plaatsvond, kwam Pfaltzgraff, inmiddels met pensioen (hoewel hij op zijn website aangeeft 'sinds 1965 leraar wiskunde' te zijn), in een spagaat terecht. Enerzijds enthousiast over de vernieuwingen die onder andere met de invoering van de GR in het wiskundeonderwijs waren gekomen, anderzijds zeer bezorgd over de in zijn ogen overdreven aandacht voor contexten. 'Veel te veel ruis (in de leerstof en in de klas) en verbale gekunsteldheden'.[2] In latere jaren werd Pfaltzgraff een steeds groter pleitbezorger van een no-nonsense aanpak in het reken-wiskundeonderwijs. Geen contexten en rekenmachines, maar veel oefening met kale sommetjes. Ook in de discussie over de rekentoetsen in het voortgezet onderwijs laat hij zich niet onbetuigd. Op zijn homepage en in de *WiskundE-brief* zijn talloze commentaren hierop te vinden.

Inhoud

Ik wilde hierboven de twee kanten van Pfaltzgraff schetsen, omdat deze ook in het Zebra-boekje terugkomen. In dit Zebra-boekje, zijn tweede, na *Experimenten met kansen* uit 2006, beoefent hij met de TI83/84 zijn oude liefde, het programmeren. Ik verwachtte met dit boekje te maken te hebben met een publicatie van nieuw materiaal. Dat is niet het geval. Reeds in 2005 publiceerde Pfaltzgraff op de eigen website *Inventies in de Vrije Ruimte*. Deze publicatie van 155 pagina's is nog steeds gratis te downloaden.[3] Hierin komen onderwerpen uit statistiek, getaltheorie en calculus aan de orde. We kunnen hierin bijna alle 62 pagina's van het Zebra-boekje terugvinden. Nagenoeg de volledige hoofdstukken 1, *Rijen van gehele getallen*; 2, *Rijen van reële getallen;* en 3, *Recursieve rijen* staan erin. Ook de toegevoegde stukjes over de wet van Benford zijn niet nieuw; dit materiaal komt grotendeels overeen met een artikel uit 2006 van Pfaltzgraff in *Euclides*.[4] Uiteindelijk lijkt alleen het acht pagina's tellende hoofdstuk 4 over complexe rijen nieuw werk.

In het boekje komt een overvloed aan (vooral getaltheoretische) wiskundige zaken aan de orde, waarbij programma's gemaakt op de TI83/84 van nut kunnen zijn. De wiskundige achtergronden worden soms op een eenvoudige manier beschreven. Een enkele keer wordt een wiskundig bewijs gegeven of wordt het bewijs in een opgave gevraagd. Dit gebeurt niet consequent; soms wordt erg diep ingegaan op de wiskundige achtergronden, soms

Tot ver in de twintigste eeuw hebben de grootste wiskundige genieën (waaronder Euler) hun tanden stuk gebeten op dit "laatste" raadsel van Fermat, maar geen sluitend bewijs gevonden. Op 25 oktober 1991 kwam er een eind aan tweeduizend jaar onzekerheid. Na acht jaar hartstochtelijke, hoogst specialistische arbeid publiceerde de Brit Andrew Wiles in een manuscript van meer dan honderd bladzijden een bewijs dat uiteindelijk de toets der kritiek kon doorstaan. En in 2005 kwam het bericht dat Gurtu (uit India) een bewijs zou hebben gevonden dat alleen gebruik maakt van wiskunde uit de tijd van Fermat. Dat geloven we maar.

figuur 1 pagina 16 van het Zebra-boekje

Eratosthenes, zegt men, zeefde de priemgetallen uit de natuurlijke getallen. Begin met 2 en schrap alle veelvouden van 2 behalve 2 zelf. Dan hetzelfde voor 3, enzovoorts. Dat laten we de rekenmachine doen. Een probleem is echter dat je voor grote priemgetallen hiermee niet gemakkelijk uit de voeten kunt.

```
PROGRAM:ZEEF
:seq(X,X,2,100)→
L1
:For(D,2,10)
:For(K,2D,100,D)

:0→L1(K-1)
:End:End
```

```
                 2
                 3
                 5
                 7
                11
                13
              Done
```

figuur 2

wordt een voor leerlingen bereikbaar resultaat zonder enige toelichting vermeld. De schrijfstijl is nogal rommelig en informeel. In figuur 1 een citaat ter illustratie. De toevoeging 'dat geloven we dan maar' die hier bij het alternatieve bewijs van de stelling van Fermat door de Indiër Gurtu wordt gemaakt, is wel erg kort door de bocht. Het valt niet mee om een duidelijke lijn te vinden in het boekje. Heel veel onderwerpen uit de getaltheorie worden kort aangestipt. Wiskundige termen en technieken uit verschillende hoeken van de wiskunde worden ten tonele gevoerd, te pas en te onpas afgewisseld met programmeertrucs en opgaven voor de leerling. Dit komt de leesbaarheid niet ten goede.
Een korte en onvolledige opsomming van de onderwerpen: priemgetallen, GGD, Diophantische vergelijkingen, stelling van Fermat, rij van Fibonacci, het $3n + 1$-vermoeden, iteratie, meetkundige rijen, zètareeks, harmonische reeks, productrijen, product van Wallis, wet van Benford, recursie, webgrafieken en chaos, prooiroofdierdiagrammen, complexe rijen en fractals. En dat allemaal in 62 pagina's! Dit betekent dat de 'wiskundige dichtheid' erg hoog is. Ter illustratie zal ik hieronder de eerste twee onderwerpen in detail bespreken.

Twee onderwerpen uitgelicht

Priemgetallen – (vijf-en-een-halve pagina). Eerst wordt een eenvoudig programmaatje getoond waarmee de delers van een getal gevonden kunnen worden. Na een erg lastige puzzelachtige opgave, afkomstig uit een boek van Peter Winkler, wordt vervolgd met de zeef van Eratosthenes (zie figuur 2). Voor een leerling die deze methode voor het eerst ontmoet, lijkt me de beknopte beschrijving van Pfaltzgraff erg lastig. Begrijpen hoe het programmaatje ZEEF werkt, komt mij ook als een flinke uitdaging voor de leerling voor. Er worden ook nog even twee bekende benaderingsformules voor het aantal priemgetallen kleiner dan een bepaald getal n 'gedropt'. Helaas geen informatie over de wiskundigen Gauss en Chebyshev die deze resultaten hebben geboekt. Daarna wordt nog bewezen dat er oneindig veel priemgetallen zijn (het bekende bewijs van Euclides, ook weer zonder te vermelden dat dit resultaat al meer dan 2000 jaar oud is, een gemiste kans.
GGD – Binnen anderhalve pagina wordt zowel het begrip Grootste Gemene Deler uitgelegd als het algoritme van Euclides om de GGD van twee getallen te bepalen, besproken. Hier zou ik verwachten dat de leerling dit moet gaan programmeren op de TI83/84, maar dat gebeurt vreemd genoeg niet. Wel wordt nog even een bekende eigenschap van twee getallen a en b met $\text{GGD}(a, b) = 1$ vermeld, namelijk dat elk getal kan worden geschreven als lineaire combinatie van a en b. Geen bewijs hiervan, ook geen opdracht om dit te bewijzen. Wel wordt hier nog even Siegmund Freud bijgehaald, en volgt er een citaat uit *Ongecijferdheid* van J.A. Poulos over Freud en diens vriend Wilhelm Fliess. Wie er op de afgebeelde foto staat, wordt niet vermeld. Een aardige Google-zoekopdracht...

Conclusie

Omdat de behandelde onderwerpen alle buiten de examenstof vallen, is het mijns inziens geen optie dat leerlingen het gehele boekje doorwerken. Het boekje geeft wel een aardige opsomming van mogelijke onderwerpen voor een praktische opdracht of profielwerkstuk. Bij elk onderwerp zijn er veel 'losse eindjes' en geeft Pfaltzgraff soms al hints en voorzetjes naar verder onderzoek. Voor leerlingen die graag programmeren, kunnen de voorbeeldprogramma's van Pfalzgraff een bron van inspiratie zijn. De leerling zal voor de wiskundige verdieping op zoek moeten naar andere bronnen, want daarvoor vind ik dit boekje niet leesbaar genoeg. Dit wordt onder andere veroorzaakt door de veel te snelle behandeling van de vaak lastige theorie. Daarbij moet ik opmerken dat de lay-out van het boekje niet erg overzichtelijk is. De pagina's zijn bijvoorbeeld helemaal volgedrukt met tekst en afbeeldingen; witregels komen nauwelijks voor. Ik zou me kunnen voorstellen dat een docent die dit boekje aan leerlingen geeft, zorgt dat er bij de verschillende onderwerpen een overzicht van geschikte wiskundige literatuur beschikbaar is. Het valt te betreuren dat zo'n overzicht in dit boekje ontbreekt.

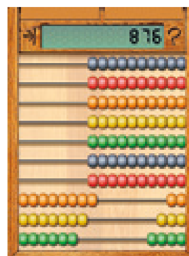
Noten

[1] *WiskundE-brief*, nr. 139, 7-5-2000
[2] *WiskundE-brief*, nr. 341, 20-3-2005
[3] Zie *www.henkshoekje.com/ProgrammaDownload/INVENTIES.pdf*
[4] Pfaltzgraff, H. (2006). De wet van Benford. *Euclides, 81*(6), 301-303

Over de recensent

Jos Remijn is toetsdeskundige wiskunde bij het Cito.
E-mailadres: *jccmremijn@gmail.com*

WISKUNDE DIGITAAL



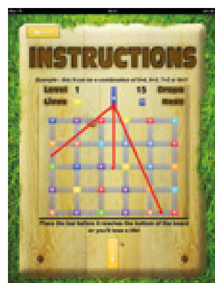
Lonneke Boels

SQUARE 9

Deze keer schrijft Lonneke Boels over een spel waarbij je vierkanten (squares) moet leggen. Als dat lukt, krijg je 2000 bonuspunten. Lukt het je om eerst een rechthoek te maken en dan van die rechthoek twee vierkanten, dan krijg je nog meer bonuspunten.

Geschikt voor: iPad met iOS 3.2 of hoger.

In dit spel worden twee belangrijke basisvaardigheden getraind: optellen van twee getallen onder de tien (expertniveau: tot en met 12) en de tafels van vermenigvuldiging. Het leuke van dit spel is dat het absoluut niet kinderachtig is en daarmee zeer geschikt voor de middelbare school.



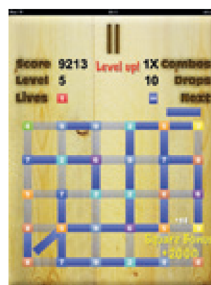
figuur 1 instructie waarin het basisprincipe van het spel wordt uitgelegd.

Voor de vakdidactici onder ons: eigenlijk oefenen de leerlingen de splitsingen van een getal aangezien het antwoord, bijvoorbeeld 9, gegeven is en je moet kiezen welke twee getallen dit antwoord geven. Datzelfde geldt voor de tafels waar het antwoord bijvoorbeeld 36 is en je zelf moet kiezen of dit 6×6 of 4×9 is. Daar oefen je dus eigenlijk de deeltafels en dat vinden leerlingen vaak net iets lastiger. Ook dat maakt het spel geschikt voor de middelbare school.

Als een blokje helemaal beneden is en je hebt het nog niet op de juiste plek gezet, ben je een leven kwijt. Na een aantal vallende blokjes, ga je een niveau omhoog en komen de blokjes sneller. Het spel kent vier niveaus: eenvoudig, middel, moeilijk en expert. Bij het eenvoudige niveau is het hoogste getal in de knooppunten zes en is de snelheid van de vallende blokjes laag. Bij expert is het hoogste getal twaalf en is de snelheid vanaf het begin al hoog. Dat maakt dat er voor veel niveaus uitdaging in zit, van vmbo-basis tot en met de onderbouw van het vwo. Het is ook een leuk spel voor pabostudenten om hun rekensnelheid flink omhoog te krijgen. Want hoewel de meesten de basisvaardigheden zoals deze voldoende beheersen, is het tempo vaak een groot probleem.

Pluspunten

- het spel start rustig in de eenvoudige modus zodat je eerst de motorische vaardigheden kunt oefenen en het spel kunt doorkrijgen;
- als je een fout maakt, licht de fout aangeklikte balk op en hoor je een geluid;
- het spel kent vier moeilijkheidsniveaus: ‘easy’, ‘medium’, ‘hard’, ‘expert’. ‘Easy’ is geschikt voor basisschool en vmbo-bk, ‘medium’ voor vmbo-gt en eerste klas havo-vwo en ‘hard’ en ‘expert’ voor havo-vwo, vermoedelijk zelfs in de bovenbouw;
- je kunt pauzeren;
- door de verschillende niveaus kun je op een pittig niveau beginnen;
- je kunt extra levens krijgen door de blokjes strategisch te plaatsen (namelijk eerst in een rechthoek en er dan twee vierkanten van maken);
- het is enigszins verslavend. Je wilt je score verbeteren en eigenlijk ook wel expert zijn;
- het heeft het idee van Tetris, Sudoku en Kamertje huren gecombineerd.



figuur 2 het vierkant rechtsonder is uit elkaar gespat en de blokjes vliegen over het scherm. Er verschijnen nieuwe getallen. Links van het woord ‘Next’ staat de waarde van het blokje dat er aankomt: 28.

Minpunten

- de teksten zijn in het Engels;
- er zitten weinig onverwachte uitdagingen of moeilijkheden in.

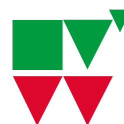
Eindoordeel: aanschaffen
Kosten € 3,99; Ontwikkelaar: GraafICT

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo’s. E-mailadres: *l.boels@alaka.nl*

MISSIE EN VISIE VAN DE NVVW

Douwe van der Kooi



Missie

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is een vereniging van wiskundedocenten die samen werken aan goed wiskundeonderwijs.

Visie

Elementaire wiskundige geletterdheid is belangrijk voor de samenleving, terwijl de innovatieve kracht van onze maatschappij afhankelijk is van het wiskundepotentieel in Nederland. Om dat te herkennen en te ontwikkelen is goed wiskundeonderwijs van essentieel belang. De wiskundedocent speelt daarbij een cruciale rol. Meer nog dan een goede methode is de kundigheid van de docent een noodzakelijke voorwaarde voor goed wiskundeonderwijs. Daarom is het nodig dat wiskundedocenten zowel vakinhoudelijk als vakdidactisch goed toegerust voor de klas staan. Dit is de grootste zorg die de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zichzelf toeëigent.
De NVvW is een vereniging die zich inzet voor het wiskundeonderwijs in vo, mbo en hbo. Ten aanzien van wiskunde en het wiskundeonderwijs hebben zich de afgelopen eeuwen verschillende visies ontwikkeld. De Vereniging ondersteunt het didactiseren van die visies, zo lang dit tot doel en effect heeft dat het aanzet tot wiskundige activiteiten op het voor de leerling geëigende niveau. De examenprogramma's zijn daarbij leidend. Er is in die perceptie geen superieure didactiek. Noodzakelijke voorwaarden voor goed wiskundeonderwijs zijn (a) goede wiskundeleraren, (b) een relevant curriculum, (c) goede voorzieningen en (d) goede arbeidsvoorwaarden. De NVvW werkt mee aan het optimaliseren van deze voorwaarden. Dat doet ze onder meer door:

(a) Een rol te spelen bij professionalisering van wiskundedocenten. De jaardag van de Vereniging is altijd inhoudelijk van aard met workshops op vakdidactisch, vakinhoudelijk of beroepsinhoudelijk gebied. De NVvW is betrokken bij het lerarenregister. De Vereniging stimuleert de oprichting van regionale vaknetwerken. *Euclides*, het orgaan van de Vereniging, en de website zijn informatief, wiskundig prikkelend en vormen een platform voor de uitwisseling van 'good-practices'.

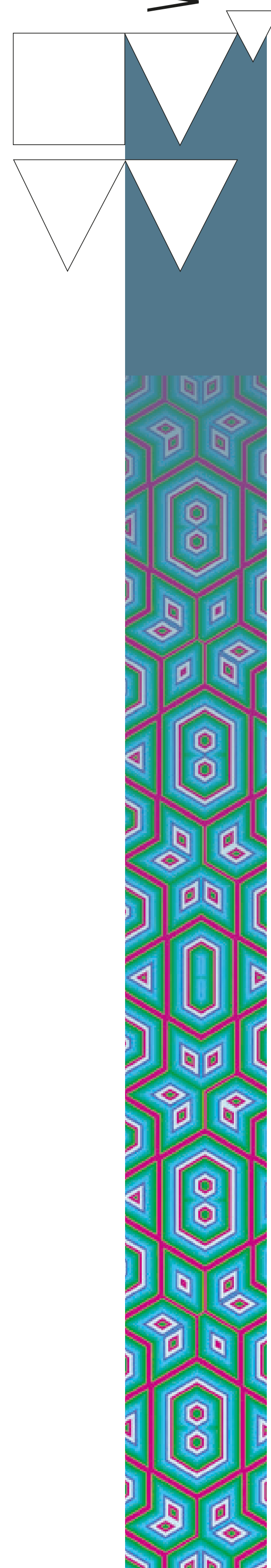
(b) Inhoudelijk bij te dragen aan de ontwikkeling van het wiskundecurriculum en haar achterban te raadplegen over op handen zijnde veranderingen. Daartoe heeft de Vereniging een aantal werkgroepen opgericht die zich beraden over het wiskundeonderwijs in speciale sectoren van het onderwijs, te weten de H/V werkgroep, de VMBO werkgroep en de HBO werkgroep. Samen met de Onderwijscommissie van Platform Wiskunde Nederland is de Vereniging bezig met het maken van een plan voor de oprichting van een permanente curriculumcommissie.

(c) De zwaarte van wiskundeprogramma's en de beschikbare hoeveelheid tijd tegen elkaar af te zetten. Daar waar het een niet (meer) in verhouding is met het ander problematiseert de Vereniging dit op het geëigende niveau. Dat gebeurt zowel vanuit het perspectief van de leraar als vanuit het perspectief van de leerling.

(d) In haar functie als vakbond als belangenbehartiger voor haar leden op te treden bij juridische geschillen.

Het Bestuur van de Vereniging beschouwt het als zijn verantwoordelijkheid het belang voor goed wiskundeonderwijs in Nederland te behartigen op basis van bovenstaande visie. Het Bestuur beschouwt vanuit dat perspectief de volgende activiteiten als zijn belangrijkste taak:

- vertegenwoordigen en verantwoorden;
- verbinden en verbonden voelen;
- informeren en peilen.



Dit betekent, nader uitgewerkt:
- **Vertegenwoordigen**: De NVvW is breed vertegenwoordigd in diverse landelijke overlegorganen.
- **Verantwoorden**: De NVvW legt verantwoording af op de jaarlijkse ledenvergadering en verspreidt deze ook via *Euclides*.
- **Verbinden**: De NVvW verbindt op macro-niveau door haar bijdrage aan PWN, ook verbindt ze leden door het verenigingsblad *Euclides*, de website *www.nvvw.nl*, de Jaarvergadering en de examenbesprekingen.
- **Verbonden voelen**: Wiskundedocenten voelen zich vaak al verbonden door het vak wiskunde en door het feit dat ze wiskundelessen geven aan studenten en leerlingen. Een vakvereniging moet hierbij een stimulerend gevoel geven en het verbonden voelen zichtbaar maken.
- **Informeren**: De vakvereniging informeert haar leden via *Euclides* en haar website.
- **Peilen**: De NVvW peilt onder haar leden middels digitale enquêtes of volggroepen.

Ontwikkelingen (voor de komende tien jaren)

Op onder meer de volgende gebieden zijn ontwikkelingen gaande die relevant zijn voor de NVvW:
- het reken- en wiskundeonderwijs;
- de kwaliteit van zittende wiskundedocenten, ook in relatie met bijvoorbeeld het lerarenregister;
- de kwaliteit van de opleidingen (eerste en tweedegraads) tot wiskundedocent;
- de (traditionele) wiskundemethoden van commerciële uitgever(s);
- daarmee samenhangend: De digitalisering van het wiskundeonderwijs;
- daarmee samenhangend: De behoefte aan digitale didactiek;
- het beschikbare budget voor wiskundelesmateriaal op scholen;
- vakdidactisch onderzoek.

Om adequaat in te spelen op deze ontwikkelingen wil het Bestuur meer leidend dan volgend zijn. Dit betekent voor de komende jaren dat het Bestuur:
- de leden snel en adequaat wil informeren en aan hen verantwoording afleggen, niet alleen in de Jaarvergadering;
- geregeld de mening wil peilen onder leden;
- doelgroepgericht wil werken om relevante informatie bij en om de meningen van de juiste groepen docenten te krijgen;
- standpunten, meningen en beslissingen breed wil uitzetten. Wiskundedocenten moeten deze herkennen en in hun werk ondersteunen;
- oprichting van netwerken via de regionale steunpunten.

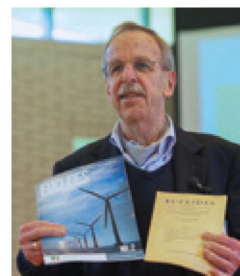
Het Bestuur

IMPRESSIES VAN DE NVVW-DAG 2013

9 november 2013
Veenendaal

Hierbij een kleine impressie van de verenigingsdag. Door een aantal collega's is verslag gedaan van de plenaire lezingen en een groot aantal werkgroepen. Hieronder vindt u al een aantal quotes uit die artikelen, de volledige teksten vindt u op *vakbladeuclides.nl/894nvvwdag.pdf*. Daar vindt u ook nog veel meer foto's.







Martin Kindt pleitte ervoor om leerlingen wiskundige begrippen te laten herontdekken (Joke Verbeek)

In een werveling van voorbeelden liet Hub Kusters ons tijdens deze werkgroep kennismaken met inspirerende lessuggesties, interessante software, nuttige verwijzingen en handige didactische tips (Marja Bos)

De docent houdt de regie en kan bepalen op welk moment in de les er met *Wisstar* gewerkt wordt en wanneer hij juist aandacht wil voor klassikale uitleg (Mathilda Offereins)

De *Wageningse Methode* zet zich in om het wiskundeonderwijs creatief en vernieuwend te houden en heeft in die geest gezorgd voor digitalisering (Thomas van Berkel)





Eén van de doelstellingen van het nieuwe programma is dat leerlingen weloverwogen een keus kunnen maken tussen een synthetische, analytische of algebraïsche aanpak van een meetkundeprobleem (Harm Bakker)

Zo is op het havo de kettingregel uit het programma gehaald omdat dit te vol was (Gert de Kleuver)

'HET IS BIJNA JAMMER DAT JE ZO NU EN DAN OOK NOG 'GEWOON' LES MOET GEVEN'

(GERHARD RIPHAGEN)

Op de pilotschool is de ervaring dat leerlingen na drie, vier weken wiskunde C weer plezier aan het vak beleven (Ineke van Pol)

Als we binnenkort met onze leerlingen echte data willen verzamelen en analyseren, dan weet ik wel welk programma ik wil gebruiken (Mieke Thijsseling)

We kunnen ons gelukkig prijzen met het feit dat de NVvW een werkgroep rijk is die zich speciaal met de geschiedenis van de wiskunde bezighoudt (Dick Klingens)

Lidy heeft ons laten zien hoe op het Bonhoeffercollege in Castricum leerlingen en collega's met plezier met het vak bezig zijn (Zwaantje Warmelink)

Wel werden we weer eens wakker geschud te beseffen welke keuze je als docent moet maken bij het introduceren van nieuwe onderwerpen waarbij je wiskundig gezien niet geheel exact te werk gaat (Rob van Oord)

Van Zwet vermaakte de zaal met zijn verhalen en aan het eind van de dag ging ieder naar huis met de overtuiging dat elke scholier statistiek zou moeten leren (Joke Verbeek)



VASTGEROEST

Ab van der Roest

KANSREKENEN MET DE NADRUK OP REKENEN

Bij het nakijken van toetsen komt Ab van der Roest steeds weer verrassende dingen tegen. Een antwoord dat voor de hand ligt wordt door leerlingen niet gegeven. Je krijgt een alternatief en bent dan verrast dat dit ook goed is.

Die verrassing wordt niet veroorzaakt door de gedachtegang van de leerling, want als ze voldoende opschrijven, dan zie je dat wel. De verrassing komt vooral door het rekenwerk. Het gaat over de volgende opgave: *Van een groep van 60 mannen zijn er vijf kleurenblind. We kiezen uit deze groep één voor één mannen totdat we een kleurenblinde hebben. Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat je meer dan vier mannen moet kiezen.*

De voorgestelde uitwerking van het correctievoorschrift is:

$P(\text{nnnn}) = \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{52}{57} \approx 0{,}699$ (n = niet-kleurenblind)

Alternatief van leerlingen: P(meer dan 4 mannen) = 1 – P(1 man) – P(2 mannen) – P(3 mannen) – P(4 mannen) =

$$1 - \frac{5}{60} - \frac{55}{60} \times \frac{5}{59} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{5}{58} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{5}{57} \approx 0{,}699$$

Antwoorden kloppen en de redenatie is makkelijk na te gaan. Klaar!

Maar als je de berekening ziet, is er toch wel wat werk te doen. Uitdagend sommetje voor de leerlingen: Laat zien dat

$$1 - \frac{5}{60} - \frac{55}{60} \times \frac{5}{59} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{5}{58} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{5}{57} = \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{52}{57}$$

zonder dat je het eindantwoord uitrekent.

Aanpak:

$$1 - \frac{5}{60} - \frac{55}{60} \times \frac{5}{59} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{5}{58} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{5}{57} =$$
$$\frac{55}{60} - \frac{55}{60} \times \frac{5}{59} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{5}{58} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{5}{57} =$$
$$\frac{55}{60}\left(1 - \frac{5}{59} - \frac{54}{59} \times \frac{5}{58} - \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{5}{57}\right) =$$
$$\frac{55}{60}\left(\frac{54}{59} - \frac{54}{59} \times \frac{5}{58} - \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{5}{57}\right) =$$
$$\frac{55}{60} \times \frac{54}{59}\left(1 - \frac{5}{58} - \frac{53}{58} \times \frac{5}{57}\right) =$$
$$\frac{55}{60} \times \frac{54}{59}\left(\frac{53}{58} - \frac{53}{58} \times \frac{5}{57}\right) =$$
$$\frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58}\left(1 - \frac{5}{57}\right) = \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{52}{57}.$$

Na de toetsweek ga ik dit bespreken met de leerlingen en hoop dat ze net zo verrast zijn als ik weer was.

Een andersoortige verrassende uitkomst hoort bij de volgende situatie.

Stel je voor dat de meester van groep 7 een cadeau mag verloten onder de 30 leerlingen die in zijn klas zitten. Hoe kan hij dat het eerlijkste doen? Je mag kiezen uit twee mogelijkheden.

1. Elke leerling schrijft zijn naam op een papiertje. Deze papiertjes zijn natuurlijk allemaal gelijk en worden op precies dezelfde manier opgevouwen. Ze gaan in een hoge hoed. De meester van groep 7 wordt geblinddoekt en hij pakt er na drie keer roeren een papiertje uit. De leerling van wie de naam op het papiertje staat wint het cadeau.
2. De meester van groep 7 schrijft voor zichzelf een getal op (1-30). De leerlingen mogen nu om de beurt een getal noemen uit die serie en de meester houdt bij welke getallen genoemd zijn. De leerling die het getal als eerste raadt, krijgt het cadeau.

Welke methode is eerlijker?

De leerlingen hebben dan vaak het idee dat de eerste methode veel eerlijker is. Schrijf het uit en reken slim met de breuken en dan...

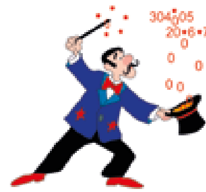
Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: a.b.vanderroest@ziggo.nl

PUZZEL 89-4

GOOCHELEN MET NULLEN

Lieke de Rooij
Wobien Doyer



Getalnotaties in een positiestelsel, waarbij soms ook een teken werd gebruikt om een 'lege' plek aan te duiden, werden al ruim voor de jaartelling gebruikt. Toch werd in Europa het ons bekende decimale positiestelsel inclusief het cijfer 0 waarschijnlijk pas goed geïntroduceerd door Fibonacci (middeleeuwen). Het woord cifr = leeg = 0 werd later gebruikt voor alle cijfers. Bij deze puzzel wordt wellicht duidelijk hoe belangrijk de 0 in onze getalnotatie is. Als je er een of meer weglaat, wordt het getal niet alleen kleiner, maar ook de delers kunnen drastisch veranderen.
De bedoeling van deze puzzel is om een rij van n gehele positieve getallen te maken, $a_1, \ldots, a_n$, waarbij elk getal wordt bepaald op grond van het vorige getal met behulp van onderstaand algoritme. U moet bij elke stap kiezen uit a of b:

a. Vermenigvuldig met een zelf te bepalen geheel positief getal.
b. Schrap zo mogelijk een of meerdere nullen.

Het startgetal a_1 wordt gegeven. De bedoeling is om uit te komen bij een kleiner getal: $a_n < a_1$. De kwaliteit van uw rij (en dus het aantal punten dat u verdient) wordt bepaald op grond van de waarden van a_n en n. De bedoeling is dat die waarden a_n en n zo klein mogelijk zijn, met voorkeur in die volgorde, dus een klein laatste getal is belangrijker dan een korte rij. Voorbeeld: 5_{x2}, 10, 1 ($a_1 = 5$, $n = 3$ en $a_n = 1$) of 21_{x5}, 105, 15_{x2}, 30, 3 ($a_1 = 21$, $n = 5$ en $a_n = 3$). U kan natuurlijk gewoon proberen, maar door gebruik te maken van modulorekenen (klokrekenen) wordt het voor veel getallen a_1 echt makkelijker. Het moge duidelijk zijn dat voor machten van 10 geldt $n = 2$.

Opgave 1 (***instap en hint voor de volgende opgaven***) – Wat is de minimale waarde van n als a_1 een macht is van 2 of 5?

Opgave 2 – Bepaal de kwalitatief beste rijtjes voor $a_1 = 2$ t/m 12.
Veel startgetallen a_1 kunnen zo worden teruggebracht tot $a_n = 1$, maar dat lukt niet altijd (zoals u in opgave 1 gemerkt moet hebben).

Opgave 3 – Bekijk de getallen uit opgave 1 waarvoor u niet uitkomt op $a_n = 1$ en leg uit waarom dat niet lukt. Veralgemeen dat zo mogelijk tot een uitspraak die ook voor grotere waarden van a_1 geldt.

Opgave 4 – Bepaal de beste rijtjes voor $a_1 = 17, 33, 37, 42, 99$ en 101.

Een uitleg over uw methode hoeft niet, maar zou wel leuk zijn in verband met de bespreking die later volgt. En bewijs (of tegenvoorbeeld) dat $a_n < 10$ altijd lukt, is lastig. Een uitdaging om dat te proberen? Of het zoeken naar een of meer oneindige rijen getallen a_1 die daar aan voldoen, buiten de machten van 2, 5 of 10. Het zou leuk zijn als u daar iets over kan bedenken, maar dat is buiten de ladderwedstrijd.

Inzenden oplossingen

Heeft u een of meer oplossingen gevonden, doe dan eens gek en stuur het op. Oplossingen kunt u mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. U kan weer 20 punten verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De persoon die het hoogst op de ladder staat, ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro.
De deadline is 5 maart a.s.

Wij wensen u veel plezier.

UITWERKING PUZZEL 89-2

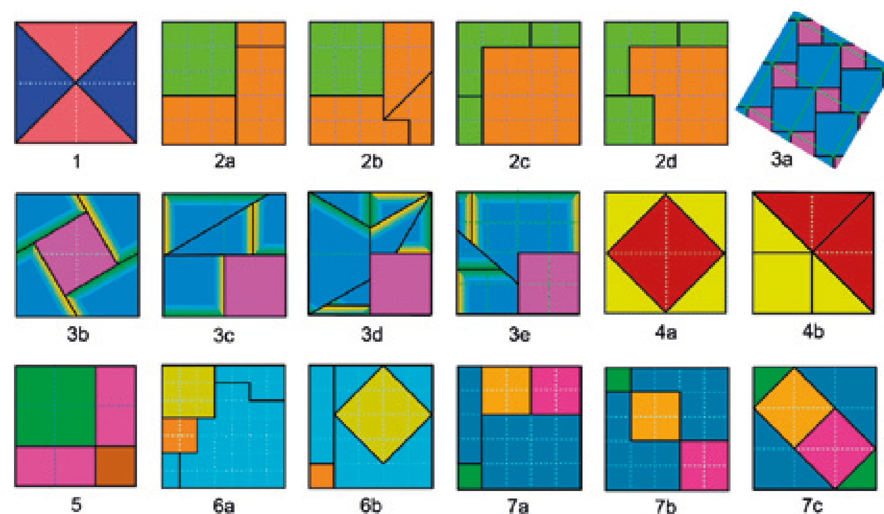
MOZAIEKEN (VOOR) GROOT EN KLEIN

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

De opdracht bij deze puzzel was steeds: Verdeel één vierkant in zo **weinig** mogelijk stukjes, zodanig dat u, gebruikmakend van alle stukjes, meerdere kleinere vierkanten kunt leggen die voldoen aan de genoemde voorwaarden. De puzzel was onder andere gebaseerd op het oude probleem om een vierkant zo te verdelen dat er drie gelijke, kleinere vierkanten van kunnen worden gelegd[1] en vierkante pizza's van Frits Göbel. Als de oppervlakten van de kleinere vierkanten worden aangegeven met hoofdletters A, B, ..., dan kunnen we de zeven opgaven als volgt noteren: 1) $A = B$; 2) $A > B$ in minder dan vijf stukjes; 3) $A = 3B$; 4) $A = B < C$; 5) $A = B > C$; 6) $A < B < C$; 7) $A < B = C < D$. Van de dertien inzendingen waren er drie met vermoedelijk optimale oplossingen: in volgorde: 4, 4, 5, 5, 4, 5, 5 stukjes. We geven een aantal van de vele door u ingezonden oplossingen, waarbij steeds van gelijke kleuren één vierkant kan worden gelegd. Hoe zal meestal niet het probleem zijn. Sommige zijn niet optimaal, maar geven wel mooie mozaïeken.

In opgave 1 – 3 hebben we twee kleinere vierkanten die samen even groot moeten zijn als het grootste vierkant. Dan zijn de zijden van die drie vierkanten ook de zijden van een rechthoekige driehoek. In bepaalde gevallen, zoals opgaven 1 en 2, kan dat met vier stukjes opgelost worden. Bij opgave 2 koos iedereen voor een verhouding tussen de zijden van 3 : 4 : 5. Voor prachtige oplossingen in vier stukjes met ook grotere Pythagoras tripletten zie [2]. Maar voor iedere verhouding $A : B$ is er in elk geval een oplossing te vinden in vijf stukjes: Maak van de kleinste twee vierkanten een vlakvulling zoals in figuur 3a. Kies een punt in de vlakvulling en maak een rooster van alle daarmee overeenkomstige punten. Dit is een vierkantenrooster dat schuin over de vlakvulling heen ligt. De zijden van de vierkanten zijn de schuine zijde van de rechthoekige driehoek. Binnen elk groot vierkant hebben we dan stukjes van de twee kleinere vierkanten die aan elkaar gelegd kunnen worden. Het aantal stukjes kan verschillen, maar als we de roosterpunten kiezen zoals bij figuur 3a, of bijvoorbeeld zoals 3b in het midden van het grootste van de twee kleinere vierkanten, krijgen we er altijd vijf.[3, 4]

In opgave 3, die met $A = 3B$ de lastigste bleek van allemaal, blijken er meer manieren te zijn dan alleen de verschuivingen van het rooster. Voorbeelden zijn 3c t/m e. Om u daar te helpen bij het leggen van de kleinere vierkanten zijn de zijden van de grootste van die twee gekleurd aangegeven. Bij 3a t/m d zijn de hoeken veelvouden van 300. Het mozaïek van J. Remijn (3e) is de enige waarin een andere hoek wordt gebruikt, met een tangens van ½√3.



Bij de opgaven 4 t/m 7 zijn de plaatjes duidelijk, hoewel lang niet iedereen de laatste twee in vijf stukjes wist te verdelen. Er was veel op internet te vinden[1 t/m 6] waarbij ook andere mooie dissecties en het ontwerpen van Perzische mozaïeken met een lessenserie voor uw leerlingen in *Euclides*.[7]

Noten

[1] *http://infoscience.epfl.ch/record/161493/files/Square_Trisection*
[2] *http://mathafou.free.fr/pbg_en/sol110d.html*
[3] *http://demonstrations.wolfram.com/HingedAndTranslationalDissectionOfTwoSquaresToOne/*
[4] *www.youtube.com/watch?v=LtkAIQcACqY*
[5] *http://csdelemmathsupport.wikispaces.com/file/view/Pythagorean+Puzzles.pdf*
[6] *www.goossenkarssenberg.nl/*
[7] Goossen Karssenberg: *Euclides 87*(7), juni 2012

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na 89-2 is:

H. Klein	134
K. v.d. Straaten	131
F. Göbel	124
K. Vugs	119
J. Meerhof	104
R. Stolwijk	104
G. Bouwhuis	96
H. Bakker	92
J. Verbakel	78
L. Pos	68

De felicitaties en de boekenbon gaan naar H. Klein.



MEDEDELING

WISKUNDEDIALOOG 2014

Op dinsdag 13 mei 2014 vindt weer de WiskundeDialoog, de jaarlijkse nascholingsdag voor wiskundedocenten georganiseerd door het Radboud PUC of Science, de Radboud Docentenacademie en het HAN College of Technology, plaats.
De hoofdthema's van deze dag zijn statistiek en ICT in de wiskundeles. U kunt kiezen uit workshops over:

- wiskunde binnen een hbo-informatica-opleiding;
- hoe instrueer je collega's over het opzetten van statistisch onderzoek?;
- differentiatie in de wiskundeles: hoe doe je dat?;
- visie op doorlopende leerlijnen gebruik ICT in po-vo-mbo-ho;
- lesideeën voor Geogebra;
- uitwisseling van ervaringen met ICT in de les;
- uitwisseling van lesideeën met materiaal ontwikkeld door de onlangs overleden Leon van den Broek.

Meer informatie vindt u op: *www.ru.nl/pucofscience/actueel/agenda* of *www.hancollegeof-technology.nl*
U kunt ook contact opnemen met Xandra Snoeker, coördinator van het steunpunt wiskunde van het Radboud PUC of Science. E-mailadres: *x.snoeker@science.ru.nl*

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Dick Klingens
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

Inzending bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast. Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04 E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard, Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46 E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 50,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. t.a.v. F. van Dop
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-leraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur
E-mail redactie@nvvw.nl

wo 12/02 OP DE SCHOLEN
Onderbouw Wiskunde Dag
Organisatie FIsme

vr 14/03 OP UNIVERSITEITEN
Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

wo 02/04 OP DE SCHOLEN
Grote Rekendag
Organisatie FIsme

vr 11/04 AMSTERDAM
Docentencongres Leve de Wiskunde!
Organisatie UvA

wo/do 16/17 04 DELFT
Nederlands Mathematisch Congres 2014
Organisatie KWG

di 13/05 NIJMEGEN
WiskundeDialoog, nascholingsdag
Organisatie Radboud PUC of Science en het Instituut Leraar enSchool (ILS).

vr 12/09 EINDHOVEN
Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html

JAARGANG 89

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	17 september 2014	24 juni 2014
2	5 november 2014	2 september 2014
3	17 januari 2014	28 oktober 2014
4	6 februari 2014	2 januari 2014
5	25 maart 2014	27 januari 2014
6	13 mei 2014	17 maart 2014
7	24 juni 2014	6 mei 2014

CASIO

Laat drie leerlingen zélf de Casio *fx*-CG20 testen



Bied uw leerlingen nu de kans om zélf de Casio *fx*-CG20 te testen en te vergelijken.

- Drie leerlingen krijgen de Casio *fx*-CG20 te leen
- Na 6 weken ontvangt u een korte leerling-enquête
- Enquête ingevuld retour? De *fx*-CG20 cadeau
- Voor uzelf ook een GRATIS *fx*-CG20 op aanvraag

Actie is bedoeld voor scholen die geen ervaring hebben met Casio grafische rekenmachines.





De leerlingen van het Graaf Engelbrecht uit Breda gingen u al voor en hebben de *fx*-CG20 getest. Lees meer over hun bevindingen op: www.casio-educatie.nl/actie

Meld u nu aan op www.casio-educatie.nl/actie

Of neem contact op met onze educatief consulent David Kropveld: dkropveld@casio.nl

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl